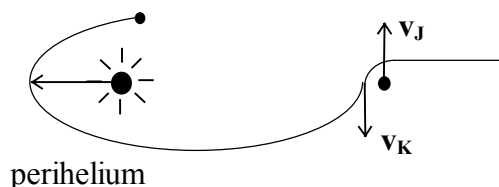


## Zadání šesté série

### Úloha VI . 1 ... Jupiter a kometa

Kometární rodina Jupiteru vzniká následujícím způsobem (viz. Obrázek A): Kometa přilétá k Jupiteru z velké vzdálenosti s téměř nulovou počáteční rychlostí. Po opuštění Jupiterova gravitačního pole (přesně sféry gravitačního vlivu Jupitera), má její rychlost (vzhledem ke Slunci) přesně opačný směr než rychlost Jupitera. Poté se pohybuje opět v gravitačním poli Slunce: v jaké vzdálenosti od něj se bude nacházet perihelium dráhy komety a jaká je její oběžná doba (jaká je velikost velké poloosy dráhy komety)? Uvažujte, že Jupiter obíhá kolem Slunce po kružnici o poloměru  $R = 5,2$  AU.

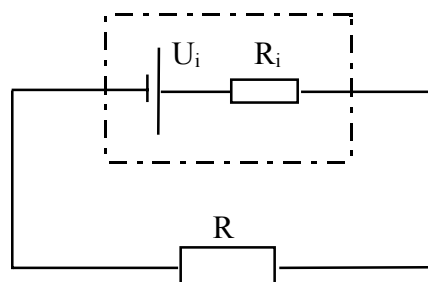
Obrázek A



### Úloha VI . 2 ... reálný zdroj

Reálný zdroj elektrického napětí si můžeme namodelovat jako soustavu ideálního zdroje napětí  $U_i$  se sériově zapojeným odporem  $R_i$  (viz Obrázek B). K tomuto zdroji je připojen spotřebič (zátěž) o odporu  $R$ . Nakreslete graf závislosti celkového výkonu, vnějšího výkonu (spotřebě v zátěži) a účinnosti obvodu (podílu těchto) v závislosti na odporu spotřebiče. Zjistěte, při jakém odporu  $R$  jsou uvedené veličiny extrémální, a rozhodněte, kdy je vhodné příslušnou hodnotu  $R$  použít.

Obrázek B

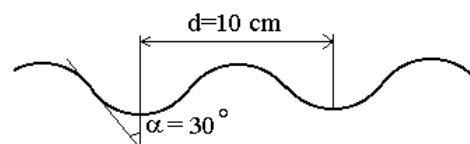


### Úloha VI . 3 ... před plechem, za plechem

K oblíbeným položkám v matfyzáckém folkloru patří tento zvyk: zahlédne-li takové individuum dlouhou stěnu z vlnitého plechu (nebo jiného podobně tvarovaného materiálu), postaví se cca. 5 m od ní a silně dupne. Ozve se (kromě obvyklého plesnutí) delší drnčivý zvuk, který postupně mění svou výšku.

Vysvětlete, jak tento zvuk vzniká, a spočítejte, jak se mění jeho frekvence s časem. Jaká je doba, po kterou ji slyší? Tvarování plechu je ukázáno na Obrázek C.

Obrázek C



### Úloha VI . 4 ... expozice

Začínající fotograf, znalec geometrické optiky, fotografoval s určitou expozicí průčelí domu ze vzdálenosti 100 m. Potom přešel do vzdálenosti 50 m, aby mohl udělat větší

snímek. Domníval se (znaje přitom, že plocha domu se zvětší čtyřikrát), že musí expozici zvětšit také čtyřikrát. Doma zjistil, že první snímek se povedl perfektně, ale druhý, na kterém měla být původně i lepá dívka, se nevyvedl. Kromě evidentního důvodu, že to zapříčinila její oslnivá krása, uveďte ten méně podstatný.

### Úloha VI. 5 ... hustota vzduchu

Pokuste se experimentálně určit hustotu vzduchu, pokud máte k dispozici dva různé velké balónky napuštěné plynem lehčím než vzduch (Nevíme, jak je to s pouťovým šílením v této době jestliže neseženete vhodný plyn, např. vodík, zkuste použít horký vzduch – chyba měření bude ovšem ďábelská. Případně můžete měřit s plynem těžším vzduchu).

*Nápověda:* Neznámé hustoty náplně balónku se při výpočtu zbavíte právě tím, že provedete měření pro dva různé balónky, čili ze dvou rovnic tuto neznámou vyloučíte.

### Seriál na pokračování

V závěru minulého dílu seriálu jsme se pustili do rozboru problémů spojených s řešením soustavy více (navzájem provázaných) rovnic. Ač se to zdá být podivné, narazíme na ně i při řešení obyčejných algebraických rovnic, tj. takových, které lze zapsat ve tvaru polynomu  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ . Běžnými postupy pro numerická řešení nalezneme u polynomů jen jejich reálné kořeny (ty odpovídají bodům, v nichž protíná graf funkce osu  $x$ ). V mnoha případech nám ale jde o to získat všechny kořeny (kterých má polynom  $n$ -tého řádu obecně  $n$ ), i ty, které byly v dřívějších dobách považovány za absurdní, jako např. řešení rovnice  $x^2+1=0$ , jímž je  $\sqrt{-1}$ . Ti zkušenější z vás už budou vědět, že každý obecný kořen lze zapsat jako kombinaci  $a+bi$ , kde  $a, b$  jsou reálná čísla a  $i$  zmiňovaná absurdní odmocnina. Takovéto řešení lze pak zakreslit jako bod  $[a, b]$  v tzv. komplexní rovině, jejíž součástí je i množina reálných čísel  $[a, 0]$ . Proto můžeme se zabývat těmito čísly jako dvourozměrnými vektory a postupovat dle metod naznačených v minulé sérii. Násobení komplexních čísel funguje stejně jako vektorový součin:  $[a, b] * [c, d] = [ac - bd, ad + bc]$  (logicky plyne ze zápisu:  $(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ , neb  $i^2 = -1$ ). Pak můžeme počítat mocniny  $(a+bi)^n$  a konečně i hodnoty polynomu ve všech bodech komplexní roviny. Výsledkem je ovšem opět komplexní číslo nebo chcete-li, vektor v rovině. (Vynést komplexní graf by v tomto případě tedy vyžadovalo 4 dimenze.) Protože však programovací jazyky většinou neovládají manipulace s komplexními čísly, musíme si příslušné algoritmy napsat sami. K výpočtu použijeme velmi efektivního algoritmu nazývaného Hornerovo schéma. Koeficienty polynomu jsou zadány v poli  $a[i]$  a s pomocí dalších polí  $b[i], c[i], d[i]$  a  $e[i]$  určíme hodnotu polynomu v bodě  $[g, h]$  i její derivaci (výsledek jsou kompl. čísla  $[b, d]$  a  $[c, e]$ ).

```

b0=a0
d0=0
i=1
zacyklu
b[i]=b[i-1]*g - e[i-1]*h + a[i]
d[i]=d[i-1]*g + b[i-1]*h
i=i+1
pokud i>n skonci
koncyklu

c0=a0

```

```

e0=0
i=1
zaccyklu
c[i]=c[i-1]*g - e[i-1]*h + b[i]
e[i]=e[i-1]*g + c[i-1]*h + d[i]
i=i+1
pokud i>n-1 skonci
koncyklu

```

Naším cílem je najít takový bod  $[g,h]$ , aby abs. hodnota funkce v tomto bodě (případně rozdíl dvou následujících kroků)  $\| [b,d] \| = \sqrt{b^2 + d^2}$  byla menší než zadaná přesnost  $\varepsilon$ .

K tomu můžeme zvolit metodu prosté iterace, popsanou v minulém díle, nebo Newtonovu metodu tečen (když se nám podařilo spočítat derivaci.) V úloze uvedené na závěr můžete použít dle metodu vašeho názoru výhodnější. (pozn: V metodě tečen používáme vzorec  $x_{i+1} = x_i + f(x)/f'(x)$ , což je nyní podíl kompl. čísel: ten se spočítá jako  $[a,b]/[c,d] = [a,b]*[c,d]/(c^2+d^2)$ ).

Pokud máme určit opravdu všechny kořeny, musíme součet  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  rozložit na součin  $a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ , kde  $x_i$  je nějaký kořen (může se i opakovat). Abychom tedy měli opravdu univerzální algoritmus, musíme po nalezení kořene  $a$  vydělit polynom  $P(x)$  výrazem  $(x-a)$  tj. nalézt takový pol.  $Q(x)$ , aby  $P(x) = (x-a)Q(x)$ . Tento polynom však bude mít už obecně komplexní koeficienty, což výpočet zkomplikuje. Pokuste se (v souvislosti se závěrečnou úlohou) sepsat algoritmus na dělení polynomu výrazem  $(x-a)$ ; pokud neuspějete, převed'te alespoň předchozí program na operace s komplexními koeficienty polynomu.

Nyní něco k minulým úlohám. V první z nich jste měli aplikovat již známé pokusy na poslední předvedenou metodu prosté iterace. Výsledky našich výpočtů uvádí násled. tabulka:

bez Aitkina			s Aitkinem		
číslo k.	řád ch.	dosažená hodnota	číslo k.	řád ch.	dosažená hodnota
0	2	1,00965000000000	0	2	1,00965000000000
3	3	1,01745698709774	3	4	1,01819505277977
6	4	1,01807869455275	6	8	1,01812744802958
9	5	1,01812392306805	9	11	1,01812744424061
11	6	1,01812683372319	22	12	1,01812744423363
14	7	1,01812740015987	103	13	1,01812744423417
17	8	1,01812744105230			
19	9	1,01812744368245			
22	10	1,01812744419428			
24	11	1,01812744422720			
27	12	1,01812744423361			
30	13	1,01812744423407			
32	14	1,01812744423410			
35	15	1,01812744423410			
38	16	1,01812744423411			
40	17	1,01812744423411			
43	18	1,01812744423411			

Počáteční hodnota 1 byla volena blízko řešení, aby zaručeně ležela uvnitř kontraktivního intervalu. Snadno se přesvědčíme, že pro hodnoty vyšší jak 3 se po několika krocích dostaneme k obrovským hodnotám. Z tabulky je patrné, jak dobře je splněna lineární závislost mezi řádem dosažené přesnosti a počtem provedených kroků.

Použití Aitkinova procesu dosti urychlí tuto jednotvárnou konvergenci – při každém jeho užití je dosaženo zpřesnění o několik řádů. Po dosažení dvanácti řádů se však, zřejmě vlivem zaokrouhlovacích chyb, zpřesňování téměř zastavilo. V tomto okamžiku

(chceme-li mít ještě lepší přesnost), je samozřejmě nejvhodnější použít metodu tečen, která bude velmi efektivní a dost spolehlivá.

*Pozn:* Do minulého dílu Seriálu se nám vloudilo několik chyb. Předně v druhé polovině první tabulky jsme zaměnili sloupce s řádem přesnosti a počtem kroků (snadno jste to mohli objevit srovnáním s první polovinou). Kromě toho u metody tečen nešlo samozřejmě o přesnější nebo hrubší odhad intervalu, ale počátečního bodu).

Řešením druhé, prémiové úlohy, se budeme zabývat až příště: máte ještě jednu sérii na to, abyste se pokusili se s tímto oříškem vypořádat.

Na závěr tedy ještě poslední úloha. Nebudeme se již trápit fyzikální motivací, takže krátce:

**Úloha S.7:** Napište (a zašlete) program, který určí všechny kořeny polynomu. S jeho pomocí naleznete čtyři řešení rovnice  $x^4+2x^3+5x^2-4x+3=0$ .

## Řešení

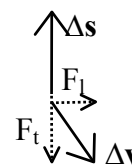
**Úloha IV . 1 ... částice v magnetickém poli** (maximum počtu bodů 5; řešilo 16 stud.)

V magnet. poli na naši částici působí dvě síly: třecí  $F_t = k v$  proti směru pohybu a Loretzova (síla elmag. pole)  $F_l = q B v$  kolmo na rychlost částice. Působící síla je rovna změně hybnosti za čas, tedy v obou případech je změna rychlosti úměrná právě rychlosti částice. Vezmeme-li malý časový interval  $\Delta t$ , můžeme tyto vztahy zapsat: ve směru pohybu

$\Delta v / \Delta t = F_t / m = k / m v = k / m \Delta s / \Delta t$ ; kolmo na něj  $\Delta v / \Delta t = q B / m \Delta s / \Delta t$ . Vztah mezi vektorem změny rychlosti a změny polohy je znázorněn na obrázku 3,5: vždy svírají konstantní úhel a poměr jejich délek je  $\sqrt{k^2 + q^2 B^2} / m$ . Platí-li to pro všechny malé změny, platí to i pro jejich součet, tedy celkovou změnu polohy a rychlosti. Celková změna  $v$  je rovna vektoru rychlosti na počátku, tedy je stejná pro všechny tři případy. Pro velikosti celkového posunutí částice v brzdícím prostředí dostáváme:

$l_1 k / m = l_2 \sqrt{k^2 + q^2 B^2} / m = l_3 \sqrt{k^2 + q^2 (B/2)^2} / m$ . Odtud bez problémů vyloučíme neznámé konstanty a dostaneme pro  $l_3 = 2l_2 / \sqrt{1 + 3(l_2/l_1)^2} = 8,3 \text{ m}$

**Obrázek 3,5**



opravoval **Miloš Gáj**

**Úloha IV . 2 ... jak asi táhne komín?** (maximum počtu bodů 6; řešilo 11 studentů)

Je jasné, že ohřev vzduchu vede ke zmenšení jeho hustoty a aerostaická síla ho začne zvedat, čímž vznikne v rouře tah. Nejprve vypočteme hustotu  $\rho$  I ohřátého vzduchu na vrchním konci trubky, pak za jednotku času projde kolem ohříváče  $n$  molů látky:

$$n = \frac{S\rho v}{M_m} \quad (1)$$

kde  $M_m$  je molární hmotnost vzduchu,  $S$  průřez roury a  $v$  rychlost vzduchu na konci roury. Tomuto množství látky je dodáno teplo  $N$ , takže se jeho teplota zvětší o  $\Delta t$ :

$$N = nc_p \Delta t \quad (2)$$

kde  $c_p$  je molární tepelná kapacita vzduchu při konstantním tlaku. Většina z vás považovala ohřev za izochorický děj, a proto ve vztahu (2) místo  $c_p$  psala  $c_V$ . Vzhledem k tomu, že plyn není uzavřen v žádné nádobě (tj. může se volně rozpínat), bude ohřev spíše dějem izobarickým. Mezi  $c_p$  a  $c_V$  platí tzv. Mayerův vztah:  $c_p = c_V + R$  (3).

Z rovnic (1) a (2) dostáváme pro  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{NM_m}{c_p \rho S v} \quad (4)$$

Vzhledem k izobaričnosti děje dále platí:  $\rho_0 t = \rho(t + \Delta t)$ , kde  $\rho_0$  je hustota okolního vzduchu. Za předpokladu  $\Delta t/t \ll 1$  lze psát:

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{\Delta t}{t} \approx \frac{\Delta t}{t + \Delta t} \quad (5)$$

Proudění ideální kapaliny podél proudnice popisuje Bernoulliho rovnice., jejíž aplikací pro náš příklad dostáváme (viz. Obrázek D):

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p_0 + H\rho g = p_0 + H\rho_0 g \quad (6)$$

Přičemž jsme předpokládali, že hustota vzduchu je v trubici konstantní ( $p = p_0 + H\rho g$ ) a že rychlost vzduchu v okolí spodního okraje roury je zanedbatelná vůči rychlosti vzduchu v rouře.

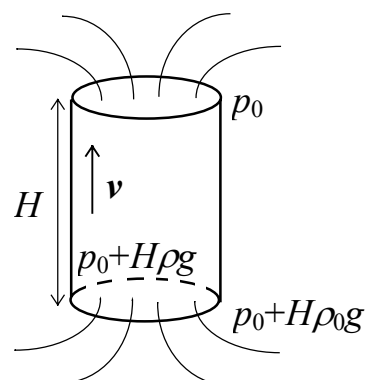
Rovnici (6) upravíme na tvar:

$$v^2 = 2gH \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \quad (7)$$

Použijeme-li (4) a (5), máme:  $v^2 \approx 2gH \frac{\Delta t}{t + \Delta t} = \frac{2gHN}{c_p} \frac{M_m}{\rho_0 t S v}$  a použijeme-li stavovou

rovnici ideálního plynu, obdržíme:  $v^3 = \frac{2gHN}{c_p} \frac{M_m}{\rho t S} = \frac{2gHNR}{\frac{7}{2} R p_0 S} = \frac{4}{7} \frac{gHN}{p_0 S}$ . Kromě sta-

vové rovnice  $p_0 = \rho_0 RT$  jsme použili také to, že molární teplo za stálého objemu je  $c_V = \frac{5}{2} R$ , neboť  $c_V$  je dáno vnitřní energií plynu. (Vzduch tvoří převážně dvouatomové molekuly, takže počet stupňů volnosti je 5.) Výsledek:

**Obrázek D**

$$v = \sqrt[3]{\frac{4 NHg}{7 p_0 S}} \approx 1 \text{ ms}^{-1}$$

V průběhu řešení jsme učinili mnoho zjednodušujících předpokladů. Například že proudění v rouři je laminární, že nedochází ke tření mezi vzduchem a stěnami roury, že vzduch se moc neohřeje ( $\Delta t \ll t$ ), že hustota vzduchu v rouři je konstantní, atd. Avšak nejzávažnější předpoklad je, že vzduch má v okolí spodního okraje rychlost mnohem menší než je rychlost vzduchu v trubici. Navíc Bernoulliho rovnice ve tvaru (6) popisuje pohyb nestlačitelné tekutiny, proto by bylo vhodnější použít Poiseuillův zákon popisující proudění reálné tekutiny v trubici.

*Saša Kupčo*

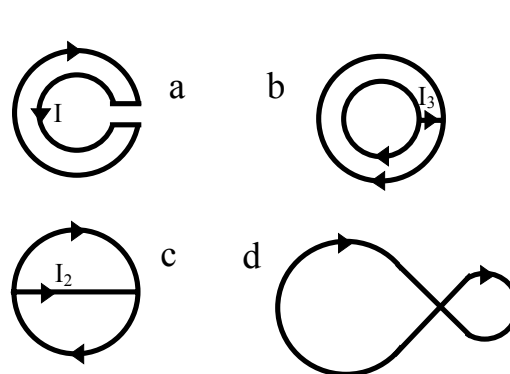
#### Úloha IV . 3 ... smyčky (maximum počtu bodů 4; řešilo 19 studentů)

Jak jste správně zjistili, budou indukované proudy konstantní s časem, protože i změna mag. indukce  $\mathbf{B}$  s časem je konstantní. V případě *a*) jde o obyčejnou smyčku, kde plocha je dána vyšrafovanou částí a proud musí být všude stejný (nemá se kde hromadit). V případě *b*) je dobré nejprve uvážit, jak bude velký proud  $I_3$ . Kdyby byl nenulový, přecházel by náboj z vnitřní na vnější smyčku a tam by se někde hromadil. proud  $I_3$  musí být tedy nulový. Jestliže spojkou neteče proud, můžeme ji

v dalším neuvažovat. Pak zůstávají jen dvě obyčejné kruhové smyčky, ve kterých budou proudy souhlasně orientovány, ale nebudou stejné. Případ *c*) je symetrický – když se díváme zvrchu nebo zespoda, musíme vidět totéž, což splňuje jen případ  $I_2=0$ . Střední propojku můžeme tedy vynechat a máme opět obyčejnou kruhovou smyčku. Smyčka *d*) je samozřejmě uprostřed spojena vodivě a můžeme obdobným postupem s přeléváním náboje z jedné smyčky do druhé ukázat, že proud mezi nimi je nulový. Obě smyčky se pak chovají jako samostatné.

Tato smyčka mohla být ovšem interpretována i jinak – bez vodivého spojení v místě překřížení. Je-li plocha levé části větší než té pravé, bude proud téct ve směru odpovídajícím šipce vlevo.

Obrázek E



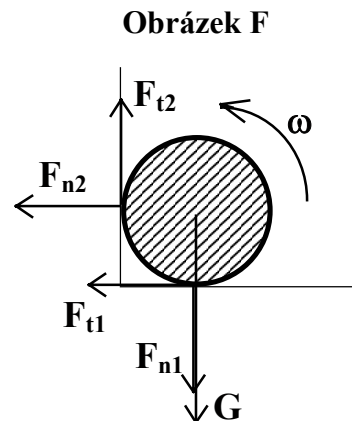
*Jan Hradil*

#### Úloha IV . 4 ... válec kontra zed' (maximum počtu bodů 3, bonusu 2; řešilo 22 studentů)

Síla smykového tření je, jak všichni víme, úměrná velikosti normálové složky síly  $\mathbf{F}_n$  působící na styčnou plochu,  $F_t = \mu F_n$ . Existuje tzv. Amontonsův zákon (takových pojmenovaných vět je), podle kterého je třecí síla nezávislá na velikosti plochy styku obou těles a součinitel úměrnosti na  $F_n$  nezávisí. Pro malé rychlosti a rozumné povrchy nastává pak suché tření (Coulombovo), kdy koeficient  $\mu$  nezávisí na rychlosti smýkání. Tento předpoklad evidentně nesplňují nejrůznější hladké povrchy (snad jste již uklouzli na vyleštěné podlaze) a z materiálů umělé hmoty.

Předpokládejme, že náš dřevěný válec vykazuje Coulombické tření se stěnou a podložkou a otáčí se přijatelnou rychlostí. Pokud naše situace nastala nárazem rotujícího válce po podložce, měl by být dostatečně hmotný na to, aby setrvačná síla překonala impuls nárazu na stěnu, jinak by válec odskočil a Bůh ví, jakou rychlostí by se točil. Chci zdůraznit, že děláme značné množství předpokladů, kterými omezujeme platnost našeho modelu. (Některé předpoklady jsou zřejmé a ani je neříkáme, třeba že nefouká vichřice, či není zemětřesení. Je ale důležité uvědomit si, že pro umělohmotný válec pohybující se proti trampolíně náš model neplatí.)

Úloha byla velice snadná, za předpokladu, že jste zvážili správně dvě hlavní skutečnosti. Především bylo zapotřebí správně zakreslit působící síly (viz. Obrázek F), a pak správně interpretovat Newtonův zákon pro tuhé těleso; je-li hmotný střed tuhého tělesa v klidu, pak výslednice vnějších sil působících na těleso je nulová. Většina z vás špatně interpretovala sílu  $F_{n1}$ , podle nich je síla dána časovou změnou hybnosti, ale hybnosti posuvného pohybu před nárazem. Že tomu tak není usoudíme snadno z toho, že stejnou situaci jako je na obrázku dostaneme, když roztočíme válec a pak jej přiložíme ke stěně libovolně pomalu. Ze zákona zachování hybnosti a momentu



hybnosti plyne, že energie posuvného pohybu byla zcela pohlcena během srážky (změnila se na vnitřní teplo) a energie otáčivého pohybu během srážky nezměnila (ale po nárazu začalo okamžitě působit tření).

Rovnováhu sil dává vektorový vzorec  $\mathbf{G} + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{t1} + \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_{t2} = \mathbf{0}$ . Jelikož je problém dvourozměrný, představuje tento vztah dvě rovnice. Zároveň víme, že  $F_{t1} = \mu F_{n1}$  a  $F_{t2} = \mu F_{n2}$ . Dostáváme tak soustavu rovnic:

$$F_{t1} = \frac{F_{t2}}{\mu} \quad G - F_{t2} = \frac{F_{t1}}{\mu}$$

Rozřešíme-li tuto soustavu, dostáváme velikosti třecích sil:

$$F_{t1} = \frac{mg}{\mu^2 + 1} \mu \quad F_{t2} = \frac{mg}{\mu^2 + 1} \mu^2$$

Celkový moment sil je  $M = (F_{t1} + F_{t2})R$ , kde  $R$  je poloměr válce; moment sil je samozřejmě brán vzhledem k ose otáčení, která nám prochází těžištěm. Zároveň je  $M = J\varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení. Pro rovnoměrně otáčivý pohyb platí analogické kinetické rovnice jako pro posuvný:

$$\frac{1}{2} mR^2 \varepsilon = \frac{mg(1 + \mu)\mu}{1 + \mu^2} R \quad \varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \quad \omega = \varepsilon t = \frac{v}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{v^2}{4Rg} \frac{(1 + \mu^2)}{(1 + \mu)\mu}$$

K tomuto vztahu snadno dojdeme použitím zákona zachování energie, neboť konstantnost třecích sil dá jednoduchý výraz pro práci:

$$\frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{4} mv^2 = (F_{t1} + F_{t2})R\varphi$$

Nakonec se s vámi podělím o originální řešení jednoho z vás, které je z matematického hlediska triviální a dalo by se říct zbytečné, zato je velice fyzikální v přístupu k problému. Pro znalce: jedná se v podstatě o numerické řešení iterací soustavy rovnic uvedené výše.

Třecí síla  $F_{t1}$  je dána tíhovou silou  $mg$  a jako taková je normálovou silou  $F_{n2}$ , která zase dává sílu  $F_{t2}$ . Jenomže tato síla nadzvedává těleso, čili ji musíme od tíhové síly odečíst, abychom dostali normálovou  $F_{n1}$ . V důsledku toho se zase poopraví  $F_{t2}$ , kterou zase odečteme od tíhové síly, abychom dostali  $F_{n1}$ . Matematicky shrnu toto iterování takto:

$$F_{t1} = \frac{F_{t2}}{\mu} \quad F = G - F_{t2} = \frac{F_{t1}}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \mu F = F_{t1}$$

$$(1) \quad F_{t2} = G\mu \rightarrow F_{t1} = G\mu^2 \rightarrow F = G - G\mu^2 = G(1 - \mu^2)$$

$$(2) \quad F_{t2} = G\mu(1 - \mu^2) \rightarrow F_{t1} = G\mu^2(1 - \mu^2) \rightarrow F = G - G(1 - \mu^2)\mu^2 = G(1 - \mu^2 + \mu^4)$$

V  $(n)$  - tém kroku dostaneme součet geometrické řady.

$$(n) \quad F_{t2} = G\mu(1 - \mu^2 + \mu^4 - \mu^6 + \dots + (-1)^{n-1} \mu^{2(n-1)})$$

$$F_{t1} = G\mu^2(1 - \mu^2 + \mu^4 - \mu^6 + \dots + (-1)^{n-1} \mu^{2(n-1)})$$

$$F = G(1 - \mu^2 + \mu^4 - \mu^6 + \dots + (-1)^n \mu^{2n})$$

V limitě  $n \rightarrow \infty$  obdržíme součet geometrické řady, který pro všechny tři síly bude stejný, s kvocientem  $Q = -\mu^2$ , a tak dostaneme výsledek uvedený výše. Jelikož  $|\mu| < 1$ , je tento postup korektní i matematicky.

Zdraví vás **Halef**

#### Úloha IV . 5 ... *sférická vada* (maximum počtu bodů 4, bonusu 1; řešilo 14 studentů)

Sférická vada čočky spočívá v odchylce hodnot skutečné ohniskové vzdálenosti a ohniskové vzdálenosti  $f$  pro paprsky blízko ose (axiální paprsky), spočtené podle vztahu:

$$f = \frac{R}{n-1}, \quad (1)$$

kde  $n$  je relativní index lomu skla. Tloušťku čočky lze zanedbat s ohledem na to, že její vliv na nepřesnost vztahu (1) nezkoumáme, a na to, že s rostoucím  $x$  její velikost klesá. Lze tedy psát  $x = x'$ . Napišeme Snelliův zákon pro lomy v bodech **C** a **D** (viz. Obrázek G):

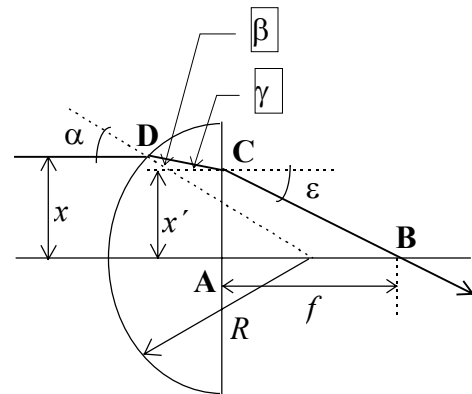
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \varepsilon} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

Z obrázku je také vidět, že  $\sin \alpha = x/R$ . Po dosazení do (2) dostaneme:

$$\sin \varepsilon = \frac{x}{R} \left[ n \left( \sqrt{1 - \left( \frac{x}{Rn} \right)^2} - \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left( \frac{x}{R} \right)^2} \right) \right] \quad (3)$$

Ohniskovou vzdálenost  $f$  určíme z trojúhelníka **ABC**:

Obrázek G





$$f = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon}}{\sin \varepsilon} x \quad (4)$$

Provedeme-li zanedbání  $x \ll R$ , dostaneme ze vztahů (3) a (4) vzorec (1).

Obdobně budeme postupovat v případě, že paprsek dopadá kolmo na rovinou stranu čočky viz. Obrázek H.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n} \quad (5)$$

Z trojúhelníku **ABC** a s uvážením vztahu  $\sin \alpha = x/R$  vyjde výsledek:

$$\sin \gamma = \frac{x}{R} n \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} - \frac{x}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{nx}{R}\right)^2} \quad (6)$$

$$f = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon}}{\sin \varepsilon} x \quad (7)$$

Provedeme-li opět zanedbání  $x \ll R$ , dostaneme ze vztahů (6) a (7) vzorec (1).

Intervaly hodnot ohniskové vzdálenosti uvažované pro sférickou vadu čočky je třeba určit z maxim a minim funkcí (3), (4) a (6), (7) v závislosti na  $x$ . Vzhledem k složitosti funkcí je asi nejjednodušší vykreslení funkce počítačem.

Rozšířením úlohy může být započítání tloušťky čočky a pečlivěji tak vyšetřovat ohniskové vzdálenosti. Zjistíme, že chyba vzniklá sférickou vadou a nenulovostí tloušťky čočky se navzájem „doplňují“ svou velikostí. Lze to zjistit už jen výpočtem několika hodnot pro konkrétní zanedbatelnou tu či onu chybu a pro konkrétní hodnoty.

*Michal Hvězda*

### Pořadí řešitelů po čtvrtém kole

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Hand	1	2	3	4	5	S3	S4	IV	BB	PB
	Student	Pilný	☺☺	MFF UK Praha	100%	5	6	4	3	4	2	3	22	102	102
1	Jindřich	Kolorenč	4.G	G Nová Paka	67%	5	6	4	3	5	2	2	23	102	68
2	Rudolf	Sýkora	3.A	G Hejčín	82%	5	-	4	-	3	-	-	12	82	67
3	Matouš	Jirák	3.A	G Říčany	87%	0	4	3	0	3	-	-	10	72	63
4	Jiří	Franta	3.A	G Příbram	87%	-	-	3	0	-	-	-	3	60	52
5	Michal	Fabinger	4.E	G Nad Alejí Praha	67%	-	-	-	-	-	-	-	0	75	50
6	Pavel	Bubák	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	86%	4	4	3	1	-	0	4	12	57	49
7	Přemysl	Kolorenč	kvinta	G Nová Paka	98%	-	-	-	-	3	2	2	3	49	48
8	Martin	Hadrávek	3.A	G Jírovcova	88%	-	2	4	0	4	-	-	10	52	46
9	Jakub	Machek	3.A	G Žďár nad Sázavou	88%	-	1	4	3	2	-	-	10	50	44
10	Peter	Macák	4.A	G Jur. Hronca Bratislava	73%	-	-	-	-	-	-	-	0	56	41
11	Martin	Krsek	4.A	G J.K.Tyla Hradec	77%	-	-	-	-	-	-	-	0	51	39
12	Robert	Šámal	4.D	G Zborovská Praha	75%	7	-	2	0	3	-	-	12	50	37
13 - 16	Jiří	Walek	4.B	G soukromé Havířov	78%	1	-	3	0	2	2	1	6	46	36
13 - 16	Jaroslav	Brzák	3.?	G Nový Bydžov	89%	2	5	0	2	2	-	-	11	40	36
13 - 16	Vlastimil	Křápek	2.C	G Křenová Brno	98%	-	-	-	-	-	-	-	0	37	36
13 - 16	Martin	Hála	kvinta	G Rumburk	98%	-	-	-	3	3	-	-	6	37	36
17 - 18	David	Nečas	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	75%	-	-	-	-	-	-	-	0	47	35

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Hand	1	2	3	4	5	S3	S4	IV	BB	PB
17 - 18	Zdeňka	Broklová	kvinta	G Polička	97%	1	-	-	-	-	-	-	1	36	35
19	Marta	Bednářová	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	73%	-	-	-	-	-	-	-	0	47	34
20 - 21	Michal	Vopálenský	3.D	G Jihlava	88%	0	1	3	0	-	-	-	4	34	30
20 - 21	Veronika	Štulíková	3.B	G Beroun	89%	0	1	3	0	-	-	-	4	34	30
22	Josef	Šeda	2.C	G Křenová Brno	99%	-	-	-	-	-	-	-	0	29	29
23	David	Stanovský	4.D	G Pardubice	75%	-	-	-	-	-	-	-	0	38	28
24	Martin	Vohralík	4.D	G Pardubice	78%	0	2	1	1	-	-	-	4	35	27
25 - 26	Jan	Foretník	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	88%	-	-	4	-	2	-	-	6	28	25
25 - 26	Petr	Vejchoda	3.A	G Brno	88%	-	-	-	-	-	-	-	0	28	25
27	Martin	Čada	4.B	G Jeseník	79%	3	-	1	1	4	-	-	9	31	24
28	Michal	Bursa	3.B	G Jana Keplera Praha	88%	-	-	-	0	-	-	-	0	26	23
29 - 32	Robert	Špalek	3.A	G Brno	89%	-	-	-	-	-	-	-	0	22	20
29 - 32	Václav	Porod	kvinta	G	100%	-	-	-	-	-	-	-	0	20	20
31	Jan	Rychtář	4.C	G Strahonice	78%	-	-	-	-	-	-	-	0	24	19
32 - 33	Lubomír	Zrnečko	4.?	G Rumburk	78%	-	-	-	-	-	-	-	0	23	18
32 - 33	Anna	Jančaříková	3.C	G Zborovská Praha	87%	-	-	-	0	-	-	-	0	21	18
34	David	Bača	3.A	G Frýdlant n. O.	89%	-	-	-	-	-	-	-	0	19	17
35	Pavel	Klang	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	88%	-	-	-	-	-	-	-	0	18	16
36 - 37	Kristýna	Kupková	4.C	G Nad alejí Praha 6	79%	-	-	4	-	3	-	-	7	19	15
36 - 37	Marie	Mášková	3.?	G PORG Praha - Libeň	89%	-	-	-	-	-	-	-	0	17	15
38	Tomáš	Kolský	2.C	G Zborovská Praha	99%	-	-	-	-	-	-	-	0	14	14
39 - 42	Jana	Koláčková	oktáva	PORG Praha 8 - Libeň	78%	-	-	-	-	-	-	-	0	17	13
39 - 42	Matěj	Liszka	4.A	G Frýdecká Český Těšín	78%	3	1	3	2	-	-	-	9	16	13
39 - 42	Gabriela	Randáková	4.A	G Brandýs nad Labem	79%	-	-	-	-	-	-	-	0	16	13
39 - 42	Karel	Kolář	kvarta	G Sušice	119%	-	-	-	1	-	-	-	1	11	13
43 - 44	Pavel	Kraus	kvinta	G Masarykovo Plzeň	99%	-	-	-	-	-	-	-	0	12	12
43 - 44	Kamil	Řezáč	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	110%	-	-	-	-	-	-	-	0	11	12
45 - 48	Jan	Horáček	4.A	G Valašské Meziříčí	78%	0	-	-	5	-	-	-	5	14	11
45 - 48	Tomáš	Vojta	4.?	G	79%	-	-	-	-	-	-	-	0	14	11
45 - 48	Jiří	Sulovský	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	89%	-	-	-	-	-	-	-	0	12	11
45 - 48	Rudolf	Bílek	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	100%	-	-	-	-	-	-	-	0	11	11
49 - 50	Josef	Janovec	4.B	SPSt F.M.Pelcla Rychnov	79%	-	-	-	-	-	-	-	0	12	10
49 - 50	Martin	Čížek	3.?	SUSt Sezimovo ústí	90%	0	0	1	0	-	-	-	1	11	10
51 - 52	Martin	Navrátil	4.A	G Karlovy Vary	78%	-	-	-	-	-	-	-	0	11	9
51 - 52	Jiří	Smola	Q	G J. Vrchlického Klatovy	109%	-	-	-	-	-	-	-	0	8	9
53	Zdeněk	Hrnčář	4.A	G Brandýs nad Labem	79%	0	-	1	0	0	-	-	1	10	8
54 - 57	Petr	Doubek	4.D	G Pardubice	78%	-	-	-	-	-	-	-	0	9	7
54 - 57	Blanka	Janoušová	4.A	G Na Vítězné pláni Praha	78%	-	-	-	-	-	-	-	0	9	7
54 - 57	Miroslav	Jílek	3.A	G Polička	88%	-	-	-	-	-	-	-	0	8	7
54 - 57	Viktorie	Šlísová	kvinta	G Rumburk	110%	-	-	-	-	-	-	-	0	6	7
58 - 61	Karel	Švadlenka	4.A	G České Budějovice	79%	-	-	-	-	-	-	-	0	8	6
58 - 61	Zdeněk	Žabokrtský	4.C	G F.M.Pelcla Rychnov n.	79%	-	-	-	-	-	-	-	0	8	6
58 - 61	Radek	Podhajský	3.A	G Mariánské Lázně	89%	-	-	-	-	-	-	-	0	7	6
58 - 61	Miloš	Roškot	2.C	G BN Benešov	100%	-	-	-	-	-	-	-	0	6	6
62 - 64	Tomáš	Belza	3.D	0 F.X.Šaldy Liberec	90%	-	-	-	-	-	-	-	0	6	5
62 - 64	Kateřina	Nohavová	2.C	G Jana Keplera Praha	100%	-	-	-	0	-	-	-	0	5	5
62 - 64	Josef	Marcel	Q	G J. Vrchlického Klatovy	100%	-	-	-	-	-	-	-	0	5	5
65	Karel	Borovička	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	90%	-	-	-	-	-	-	-	0	4	4
66 - 69	Tomáš	Černoch	4.C	G Nad štolou Praha	78%	-	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Kristina	Bartková	4.C	G J.A.Komenského	79%	-	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Matouš	Borák	4.C	G Čs. Exilu Ostrava	80%	-	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Petr	Hladík	2.A	SPSa Mělník	100%	-	-	-	-	-	-	-	0	3	3

	Jméno	Přímení	Třída	Škola	Hand	1	2	3	4	5	S3	S4	IV	BB	PB
70	Monika	Štásková	4.A	G Praha	80%	-	-	-	-	-	-	-	0	2	2
71 - 72	Petr	Sedláček	2.C	G Benešov	100%	-	-	-	-	-	-	-	0	1	1
71 - 72	Pavel	Kristen	kvarta	G Týn n. Vltavou	110%	-	-	-	-	-	-	-	0	1	1

**Termín odeslání: 12. června 1995**

**Pozor!!!** Na řešitele poslední šesté série (tj. každého, kdo v ní získá alespoň jeden bod) čeká zvláštní prémie: speciální číslo **Pokroků matematiky, fyziky a astronomie**, tentokrát se sérií velmi zajímavých článků mj. od proslulých profesorů z MFF. Takže se snažte.

**Adresa:** Fyzikální korespondenční seminář  
KTF MFF UK  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha