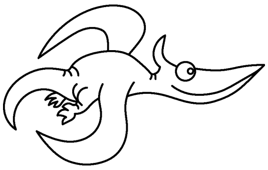


Slovíčko úvodem

Jistě již netrpělivě vyhlížíte (po zadání tří letošních sérií) konečně i nějaké řešení a výsledkové listiny. To vše najdete na následujících stránkách. Možná budete mít i připomínky k výsledkovým listinám. Možná nejste ve správné kategorii. Vězte, že je to způsobeno tím, že jsme neznali ročník, který studujete. Jestli to chcete napravit, pošlete nám lísteček s ročníkem (už to mělo být s I. sérií), podle klíče 4. ročník = letos maturuji, 3. ročník = maturuji příští rok…

Dále vás chceme ještě jednou všechny požádat, abyste svá řešení psali **čitelně** a každou úlohu na **samostatný** list papíru formátu A4, resp. A5.

A nyní přichází chvíle pro reklamu:

∗ Máte rádi fyziku? ∗ Máte rádi FYKOS? ∗ Pak jistě potřebujete novou publikaci

Fyzikální korespondenční seminář – IX. ročník.

V ní najdete celý loňský ročník FYKOSu od zadání po řešení (bez chyb, kterých jsme se dopustili loni), včetně seriálu na pokračování o termodynamice a statistické fyzice a seznam nejúspěšnějších řešitelů. Cena lidová, pouhých 15 Kč. Pokud máte o tuto publikaci zájem, pošlete nám objednávku na libovolný počet kousků a zároveň i finanční úhradu 15 Kč za 1 kus. My vám pak s další sérií pošleme objednané výtisky. Stejným způsobem si u nás můžete objednat ročenku **FKS – VIII. ročník** v ceně 5 Kč za 1 kus, v níž naleznete kompletní zadání a řešení úloh, SNP atd. předloňského ročníku semináře.

K vánocům pro vás máme ještě jeden dárek: **Den s experimentální fyzikou**, který chystáme na začátek března. Budete mít možnost navštívit vybraná experimentální pracoviště MFF UK a za doprovodu organizátorů FYKOSu klást zvídavé dotazy odborníkům, kteří na daném zařízení pracují. Bližší informace najdete v další sérii.

Mnoho štěstí při fyzikálním bádání v novém roce a veselé vánoce vám přeje

Jan Hradil

Zadání III. série

Termín odeslání: 27. ledna 1997

Úloha III . 1 ... *skokan*

Člověk padá z můstku do bazénu, přičemž v bazénu je voda a můstek je ve výšce h nad hladinou. Náš skokan má hmotnost $M = 80\,\mathrm{kg}$, hustotu $\rho = 0{,}9\,\mathrm{g.cm^{-3}}$, je vysoký $L = 1{,}7\,\mathrm{m}$ a na počátku skoku (volného pádu) byl v klidu. Do jaké největší hloubky H se skokan ponoří? Jaký bude jeho další pohyb? Odpor vodního prostření: a) zanedbejte, b) nezanedbejte.

Úloha III . 2 ... *dopravní přestupek*

Jede si tak jednou pan Doppler po městě a co nevidí. Zastavuje ho vozidlo policie a příslušník povídá: „Pane řidiči, jste si vědom toho, že jste jel na červenou?“

„Nikoliv. Když jsem projížděl kolem semaforu, tak jsem viděl zelenou. Tím jsem si naprosto jist,“ odpovídá pan Doppler.

„Tak v tom případě vám musím dát pokutu za rychlou jízdu!“

Kolik zaplatil pan Doppler a proč, jsou-li sazby 1 Kč za 1 km.h^{-1} přes povolený limit 60 km.h^{-1} ve městě?

Úloha III . 3 ... *koule*

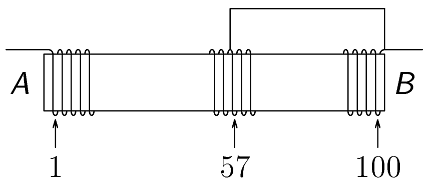
Tři koule jsou spojeny stejnými gumičkami tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník. Soustava leží na hladkém vodorovném stole. Jaké náboje je třeba na koule přivést, aby se plocha trojúhelníka zdvojnásobila? Tuhost gumiček je k, počáteční délka je l.

Úloha III . 4 ... *cirkus*

Artista padá na silně napnutou plachtu z výšky $h = 1$ m. Jaký bude maximální průhyb plachty, je-li průhyb s artistou v klidu $\Delta y = 2$ cm? Považujte všechny výchylky za malé.

Úloha III . 5 ... *kutil*

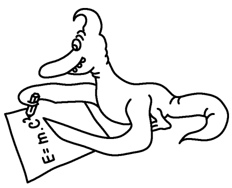
Představte si obyčejnou cívku o 100 závitech, jejíž konce označme A, B (viz obr. 1). Nyní spojíme konec závitu číslo 57 s koncem cívky B pomocí dokonalého vodiče. Jak se bude lišit tato cívka od cívky s 57 závity, budeme-li ji měřit mezi body A–B?



Obr. 1

Úloha III . 6 ... *Experimentální – optické vlastnosti vody*

Tentokrát je zadání velmi stručné: změřte index lomu obyčejné pitné vody. Současně si přečtěte autorské řešení úlohy I . 6 a pokuste se realizovat jen jednu metodu, ale zato co nejprecizněji.



Řešení I. série

Úloha I . 1 ... *stojánek na víno* *(3 body, řešilo 136 studentů)*

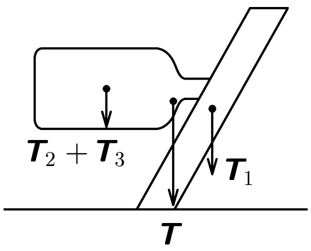
Z obrázku v zadání nebylo patrné, zda podložka je součástí stojánku, proto jsme za správné považovali oba způsoby řešení. V obou případech šlo o to, kde se nachází těžiště celé soustavy. Stojánek bude funkční, když těžiště celé soustavy stojánek–láhev bude ležet nad podstavou stojánku (podmínka stability).

a) Podložka je součástí stojánku

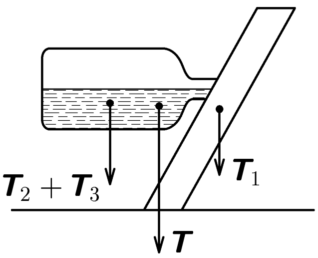
V tomto případě musí těžiště ležet nad podložkou, což, jak je z obrázku v zadání patrné, vždy platí, protože běžně používané lahve ani nepřesáhnou podložku.

b) Podložka není součástí stojánku

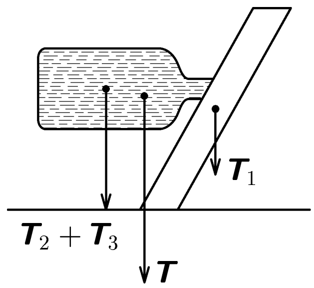
V tomto případě podstavou stojánku rozumíme pouze podstavu dřevěnného hranolu, tudíž těžiště soustavy musí ležet nad touto podstavou — to je podmínka stability. Poloha těžiště soustavy je dána polohou těžiště a tíhou jednotlivých částí soustavy: stojánku (tíha $\boldsymbol{T}_1$) , prázdné láhve (tíha $\boldsymbol{T}_2$) a kapaliny (tíha $\boldsymbol{T}_3$).



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

Doléváme-li postupně kapalinu do láhve, postupně se mění jak poloha těžiště, tak tíha kapaliny (viz obr. 2a až 2c). Tím se mění poloha výsledného těžiště soustavy, která je stabilní, pokud se těžiště soustavy nachází stále nad podstavou stojánku — stačí tedy vyšetřit podmínku stability pro prázdnou a plnou láhev.

Z uvedeného vyplývá, že daný stojánek lze sestrojit a jeho stabilita je ovlivněna spoustou faktorů…(laskavý čtenář si snadno doplní). Vždy ale lze setrojit stojánek, aby splňoval podmínky zadání; fyzikálně řečeno, aby těžiště se vždy nacházelo nad podstavou hranolu.

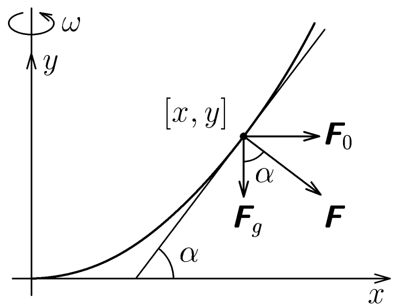
Jana Gřondilová & Veronika Štulíková

Úloha I . 2 … *alchymistické zrcadlo* *(3 body, řešilo 94 studentů)*

Hladina rotující kapaliny vytvoří paraboloid. Pro jednoduchost stačí pracovat v rovině svislého řezu procházejícího osou rotace. Položme počátek soustavy souřadnic do vrcholu paraboloidu. Pak má křivka rovnici

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 \,, \tag{1}$$

což lze dokázat takto. Aby byla částice na hladině v klidu, musí být výslednice sil, které na ni působí, normálou k povrchu. Sklon hladiny je tedy dán poměrem velikostí sil gravitační a odstředivé



Obr. 3

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} \,. \tag{2}$$

Křivka je tedy dána diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega^2 x}{g} \,. \tag{3}$$

A z toho plyne

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + c \,, \tag{4}$$

kde konstantu c položíme rovnou nule, vzhledem k volbě souřadné soustavy. Všimněte si, že ohnisková vzdálenost nezáleží na hmotnosti, tudíž ani na hustotě kapaliny.

Teď, když máme jasno ve tvaru křivky, je možné použít více postupů. Jednoduché je říci, že parabola daná rovnicí

$$x^2 = 2py \,, \tag{5}$$

má ohniskovou vzdálenost $p/2$, a odtud už vyjde

$$f = \frac{g}{2\omega^2} \,. \tag{6}$$

Delší, ale celkem spolehlivé řešení získáme tím, že vezmeme paprsek přicházející z nekonečna rovnoběžně s osou ve vzdálenosti r, v místě dopadu se odrazí o dvojnásobný úhel než je úhel $\alpha(r)$ a hledáme, kde tento odražený paprsek protne osu. Při dobré orientaci ve vzorečcích analytické geometrie vyjde nezávisle na r. Na závěr bych se rád zmínil o elegantním způsobu řešení: Uvažujme paprsek z nekonečna, rovnoběžný s osou, dopadající na hladinu v místě, kde je skloněna o úhel $\alpha = 45°$ k vodorovné rovině. Tento paprsek se odrazí do vodorovné roviny a tudíž místo jeho odrazu je ve výšce rovné ohniskové vzdálenosti. Užitím rovnic (2) a (3) tak dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha = 1 = \frac{\omega^2}{g}x_0\,, \quad \text{z čehož} \quad x_0 = \frac{g}{\omega^2}\,. \tag{7}$$

Index 0 se vztahuje k onomu význačnému bodu. Po dosazení do rovnice paraboly obdržíme téměř okamžitě výsledek:

$$f = y_0 = \frac{\omega^2}{2g}x_0^2 = \frac{\omega^2}{2g}\frac{g^2}{\omega^4} = \frac{g}{2\omega^2}\,. \tag{8}$$

Kdyby měl někdo z Vás pocit, že se jedná o teorii odtrženou od reálného světa, vězte, že na stejném principu pracoval originální astronomický přístroj. Jednalo se o tzv. Nušlův cirkumzenitál, kterým se určovaly časy průchodů hvězd kružnicí určité výšky nad horizontem. Přístroj existoval ve třech exemplářích.

Pavel Bubák & Jan Mocek

Úloha I . 3 ... *ponořit se či neponořit?* *(4 body, řešilo 71 studentů)*

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že je deska stejně velká jako podstava plovoucího kvádru a vrstva nevodivého dielektrika mezi nimi je dostatečně tenká na to, aby v ní bylo elektrické pole homogenní.

Pokud je deska na dně uzemněná, nabije se opačným nábojem stejné velikosti jako kvádr. Systém pak bude podobný deskovému kondenzátoru a velikost elektrické intenzity v něm můžeme vyjádřit jako:

$$E' = \frac{U}{d} = \frac{Q}{Cd} = \frac{Q}{\varepsilon S}\,. \tag{9}$$

Jedna deska samozřejmě vytváří pouze poloviční intenzitu:

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon S} \tag{10}$$

a na kvádr působí síla

$$F = QE = \frac{Q^2}{2\varepsilon S}\,, \tag{11}$$

která se musí vykompenzovat přírůstkem síly vztlakové. Všimněte si, že síla nezávisí na vzdálenosti hranolu a dna. Změna hloubky ponoru tedy bude

$$\Delta h = \frac{F}{\rho g S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon S^2 g\rho}\,. \tag{12}$$

Jestliže však tento výraz vyjde větší než byla výška původně neponořené části hranolu, k vyrovnání sil nedojde, hranol klesne až na dno, kde se vybije, a pak se vrátí zpět do počáteční polohy.

Pokud deska na dně uzemněná není, budou se na ní pouze indukovat povrchové náboje, jejichž silové působení se však vykompenzuje, používáme-li výše popsané přiblížení.

Kdybychom měli úlohu řešit beze všech aproximací, museli bychom numericky propočítat pole v dielektriku s uvážením povrchových nábojů, které zde budou hrát určitou roli i v případě, že je deska nekonečně tenká. V jejím středu se totiž v důsledku větší intenzity pole kvádru budou indukovat náboje opačného znaménka, než má kvádr, a tyto náboje pak budou chybět na okraji. Přitažlivá síla se tedy vytvoří v každém případě.

Michal Fabinger

Úloha I . 4 ... *překvapení po procitnutí* *(4 body, řešilo 148 studentů)*

Tato úloha byla z řady kvalitativních, úvahových problémů. Je velmi těžké obsáhnout šíři důsledků a všech souvislostí při změně rozměrů. Málokdo z vás ale diskutoval problém pokud možno konsistentně, aby se v tom opravující vyznal, a téměř nikdo nepoužil v řešení jednoduše transformaci fyzikálních veličin. Proto se autorské řešení bude zabývat především touto stránkou pohledu. Cílem úlohy nebylo dojemně líčit, jak spadnete ráno z postele, ale zkoumat, jak se změní fyzikální zákony (gravitační a elektrické působení, hustota, tlak, teplota apod.).

Nejdříve si ujasníme, co to znamená, že můžeme pozorovat nějakou změnu. Vzhledem k tomu, že jsme zvyklí všechny velikosti posuzovat realitivně vůči jiným velikostem, neviděli bychom přímo zvětšení světa. Změnu bychom viděli porovnáním procesů, které by probíhaly jinak před a po zvětšení. Jak jeden z řešitelů vtipně poznamenal, že skoro nic by nefungovalo tak, jako před transformací (změnou rozměrů).

K tomu, abychom mohli mluvit o pozorovatelných změnách, musíme specifikovat, jak se změní fyzikální zákony. A tom byla základní myšlenka úlohy, ale nikdo z vás ji dostatečně neodiskutoval. Vezměme například Newtonův gravitační zákon $F_g = \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Tato formule dává předpis pro gravitační sílu v případě, že dvě tělesa jsou od sebe vzdálena r a mají hmotnosti m_1, m_2. Vzdálenost a hmotnost měříme pomocí nějakého měřítka (například metr je definován přes rychlost světla, kilogram je uložený v ústavu pro míry a váhy v Paříži). Základní otázkou je, jestli po transformaci (změně rozměrů) se zákony změní tak, že do nich dosadíme vzdálenost změřenou stejným způsobem jako před transformací, vezmeme prostě nějaký metr, který se ale také zvětšil, anebo měříme pomocí původních nezměněných měřítek. Matematicky řečeno, označíme-li $v(\mathsf{A},\, \mathsf{B})$ vzdálenost dvou bodů měřenou původními měřítky, $v'(\mathsf{A},\, \mathsf{B})$ vzdálenost měřenou zvětšenými měřítky a A', B' jsou obrazy bodů A, B po transformaci (čárkovaně značím veličiny a jednotky po transformaci), tak platí:

$$v(\mathsf{A}',\, \mathsf{B}') = 10\, v(\mathsf{A},\, \mathsf{B})\,,$$

$$v'(\mathsf{A}',\, \mathsf{B}') = v(\mathsf{A},\, \mathsf{B})\,.$$

Teď už jenom zbývá rozhodnout, jestli po transformaci bude platit místo $F_g = \kappa\frac{m_1 m_2}{v(A,B)^2}$

a) $F_g = \kappa\frac{m_1 m_2}{v'(A',B')^2}$ (vzdálenost měříme stejným způsobem jako před transformací – pomocí měřítek, které se změnily) nebo

b) $F_g = \kappa\frac{m_1 m_2}{v(A',B')^2}$ (vzdálenost měříme pomocí původních, nezměněných měřítek).

A na toto z vás nepřišel nikdo. Prosím vás, má-li mít nějaká transformace veličin (což je naše změna rozměrů) smysl, musí platit konsistentně pro všechny veličiny bez rozdílu, ať je to výška domu, psa či vás samotných. Vy této změně podléháte také.

Rozeberme nejprve případ a). Fyzikální zákony platí ve stejné formě jako před transformací, přičemž fyzikální veličiny v nich obsažené se měří změněnými měřítky. To znamená, že jste sice všechny rozměry desetkrát zvětšili, ale rovněž jste předefinovali jednotku metru (tj. změnili fyzikální konstanty, např. rychlost světla) tak, že se vlastně nic nestalo. Všechny pohybové rovnice vypadají úplně stejně, veličiny nabývají ve změněných měřítkách stejných hodnot, ale nikdo si ničeho nevšimne. Délka libovolného předmětu po transformaci je $[l']\,\mathrm{m}' = l' = 10l = 10[l]\,\mathrm{m} = [l]10\,\mathrm{m} = [l]\,\mathrm{m}'$ (hranatou závorkou rozumím číselnou hodnotu veličiny), neboť právě $\mathrm{m}' = 10\,\mathrm{m}$. V tomto smyslu jsou fyzikální zákony neměnné vůči libovolné transformaci. (Což je zároveň jeden z výchozích principů Obecné teorie relativity.) Jenom předefinujeme jednotku, ale jestli jsme to udělali tak, že všechny předměty jsme 10× vzdálili a přitom desetkrát zvětšili rychlost světla, to nikdo nepozná.

Případ b). Tímto druhým případem jste se výlučně zabývali. Nebudu tu líčit, jak se 100× zmenší gravitační zrychlení, 1000× zmenší hustota látek apod., jen se soustředím na základní problémy, se kterými jste si neporadili.

Především, naše změna totálně nesplňuje platné zákony. Nemůžete zároveň splnit zákon zachování hybnosti (rychlost zůstává konstantní) a zachovat také moment hybnosti (to by musela rychlost 10× klesnout). *Někdo* prostě přišel (jestli to byl ufónek nebo Bůh, považuji za nepodstatné) a vynaložil své úsilí na to, aby všechny částice od sebe 10× vzdálil. Musel tím zvýšit desetkrát i jejich rychlosti, neboť $v = \Delta s/\Delta t$, jinak by porušil výše zmíněné transformační pravidlo. Musíme ale také říci, na jaké úrovni v nitru hmoty se zastavil. Pokud jenom vzdálil molekuly, změnil tak většinu látek v plyn (1000× menší hustota), pokud odděloval i atomy, rozbil tak skoro všechny chemické sloučeniny (100× klesla elektrostatická síla, která je zodpovědná za všechny chemické vazby), mohl i rozbít atomy a nakonec i rozštěpit jádra atomů – oddělení nukleonů od sebe (a na to už je třeba vynaložit sakra velikou energii). A tím jeho moc končí, i kdyby byl všemocný. Kvarky uvnitř nukleonů už oddělit nemůže, neboť energie k tomu potřebná je tak velká, že bohatě stačí na tvorbu nových částic. Tady je vidět, že takto klasicky pojatá úloha musí mít své hranice, z klasického hlediska můžeme jít maximálně po úroveň atomů.

Rozeberme také přírodní zákony. Síly, které ubývají s kvadrátem vzdálenosti (jsou to takzvaně síly dlouhodosahové) logicky klesnou 100×. Zároveň ale platí, že podle definice síly z druhého Newtonova zákona $F = ma$, abychom urychlili nějaké těleso na stejnou číselnou hodnotu zrychlení, musíme vynaložit desetkrát větší sílu ($a' = 10a$), efektivně tedy klesne např. gravitace 1000×. Snáze tento jev pochopíme tak, že naši transformaci dotáhneme matematicky do konce. Nebudeme měnit číselné hodnoty rozměrů, ale formálně předefinujeme fyzikální konstanty tak, aby se nám vše jevilo 10× větší, jako by se metr desetkrát zmenšil. Poté všechny základní konstanty předefinujeme tak, aby zákony zůstaly ve stejné podobě, a máme tady nový svět. Konkrétně 10× zmenšíme rychlost světla, 1000× zmenšíme gravitační konstantu κ, neboť v jejím rozměru je m^{-3} apod. Nutno však poznamenat, že v naší úloze jsme objektivně žádné konstanty neměnili, studujeme ten samý vesmír jako před změnou, tímto způsobem ale snadno nahlédneme, jak se který proces změní.

Nakonec shrnu vaše závěry, jak by to s námi vypadalo. Jedním slovem – špatně. 1000× menší hustota způsobí, že z běžných látek budou plyny, maximálně kapaliny. Tíhové zrychlení na „povrchu“ Země bude 100× menší, odstředivá síla kolem rovníku způsobí (stoupne 10×), že se většina hmoty Země rozlítne do vesmíru (za předpokladu, který jsem již diskutoval, že se totiž zvětší rychlost, aby oběžná doba zůstala stejná). Termojaderná syntéza ve Slunci je silně závislá na hustotě hmoty, Slunce vyhasne a díky rotaci dříve, než se opět gravitačně dá do kupy, ztratí tolik hmoty, že už na další svícení mít nebude. O rozpadu molekul a atomů díky stokrát slabší elektrostatické interakci jsem už psal. Ze Sluneční soustavy i galaxie se stane vysoce energetická mlhovina a snad za pár miliard let dojde k tomu, že se na nějaké nově vzniknuvší planetě z nově vytvořených atomů a molekul zrodí inteligentní život, který pochopí, jakou strašnou katastrofu naše úloha ve vesmíru vyvolala.

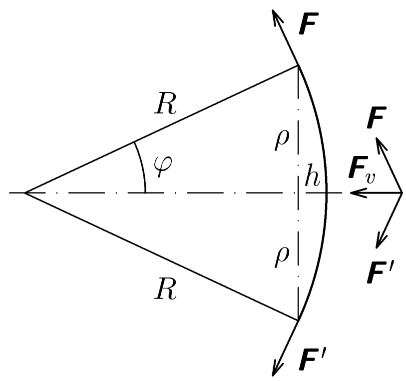
Halef & David Stanovský

Úloha I . 5 ... *balónek* *(6 bodů, řešilo 92 studentů)*

Před samotným řešením příkladu je třeba si důkladně přečíst zadání a povšimnout si, že v zadání úlohy je popsáno chování kruhu z uvažované gumové blány, zatímco úloha požaduje vyšetřit chování kulového povrchu, které by mohlo být zcela odlišné. Dále je třeba si povšimnout, že materiálovou konstantou je veličina označená a, nikoli f. Pro správné pochopení celé situace je dobré si také povšimnout, že pro $r = r_0$ je $f = 0\ \mathrm{N.m^{-1}}$ - „pnutí je v počátečním stavu nulové“.

Prvním krokem k úspěšnému vyřešení příkladu je najít závislost poloměru balónku R na f. Většina z řešitelů přímo psala, že platí $R = R_0(1 + af)$, obdobně jako pro kruh. Toto však není zcela zřejmé a je nutné tuto závislost vyvodit! Nechť je balónek, jehož počáteční poloměr byl R_0, nafouknut na poloměr R. Uvážíme kulový vrchlík o poloměru ρ. Jelikož povrch koule má v každém bodě stejné vlastnosti, platí $\rho/\rho_0 = R/R_0$. Je-li vrchlík dostatečně malý, platí v označení dle obr. 4 $\varphi = \dfrac{\rho}{R}$ a pro jeho výšku platí

$$h = R(1 - \cos\varphi) = R\left[1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right] = R\frac{\varphi^2}{2}\,. \qquad (13)$$



Obr. 4

Odtud získáme $\dfrac{h}{\rho} = \dfrac{\varphi}{2}$, což znamená, že pro malé φ je vrchlík mnohem „plošší než širší“ a lze tudíž pro něj použít vztahy platné pro kruh. Odtud již přímo plyne

$$(1 + af) = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{R}{R_0}\,. \qquad (14)$$

Tento vztah lze také získat porovnáním poměru obsahů dvou kruhů z uvažovaného materiálu s poměrem povrchů dvou koulí:

$$(1 + af)^2 = \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R_0^2}\,. \qquad (15)$$

Platí tedy $R = R_0(1 + af)$. Mnoho řešitelů použilo ve svém řešení vztah $4\pi R^2 = \pi r^2$, který je neplatný, neboť poloměr koule není žádným způsobem spjat s poloměrem kruhu, který sloužil v úloze pouze k objasnění námi předpokládaných platných vztahů. Odtud již snadno odvodíme, že maximální objem balónku je

$$V_{max} = \frac{4}{3}\pi R_{max}^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3(1 + af_{max})^3\,. \qquad (16)$$

V případě, že zanedbáme přetlak v balónku vzniklý pnutím v gumové bláně, lze do balónku fouknout celkem

$$n = \left[\frac{V_{max} - V_0}{V_{fuk}}\right] \text{ krát (} [x] \text{ znamená dolní celou část čísla } x \text{)}, \qquad (17)$$

kde $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$. Za bezchybné odvození tohoto vztahu byly udělovány 4 body.

K dosažení přesnějšího výsledku je třeba uvážit přetlak v balónku. Uvážíme opět kulový vrchlík o poloměru ρ. Pro dostatečně malý kulový vrchlík platí $\varphi = \frac{\rho}{R}$. Součet velikostí elastických sil působící po jeho obvodu je $F = 2\pi\rho f$, velikost jejich výslednice, která směřuje do středu balónku, je

$$F_v = F\varphi = 2\pi\rho f\frac{\rho}{R} = \frac{2\pi\rho^2 f}{R}\,. \tag{18}$$

Tato výslednice způsobuje přetlak

$$\Delta p = \frac{F_v}{\pi\rho^2} = \frac{2f}{R}\,. \tag{19}$$

Tento vztah lze také odvodit následovně: Představíme si kouli jako dvě polokoule, délka jejich spoje je $2\pi R$ a působí tedy na něm síla $2\pi Rf$. Tato síla odpovídá síle způsobené tlakem, která se snaží obě polokoule odtrhnout. Získáváme tedy:

$$\Delta p\pi R^2 = 2\pi Rf \qquad \text{a tedy} \qquad \Delta p = \frac{2f}{R}\,. \tag{20}$$

Protože teplota v balónku je stejná jako teplota v okolí balónku platí:

$$(p_a + \Delta p)V_{max} = p_a(V_0 + nV_{fuk}) \tag{21}$$

$$n = \left[\frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{V_{fuk}p_a}\left(p_a + \frac{2f_{max}}{R_0 + R_0 af_{max}}\right)(1 + af_{max})^3 - \frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{V_{fuk}}\right] \tag{22}$$

Za odvození tohoto vztahu bez vážnějších chyb bylo udělováno 6 bodů. Za předpokladu, že teplota v balónku nedosáhne teploty v okolí balónku, lze pro přepočet objemu použít vztahů platných pro adiabatický děj.

K řešení lze přidat ještě jeden zajímavý postřeh k úloze. Vypočteme práci potřebnou k roztažení gumovému kruhu o počátečním poloměru r_0 na poloměr r. Platí:

$$W = \int_{r_0}^{r} 2\pi\rho\frac{\rho - r_0}{r_0 a}d\rho = \pi\frac{2r^3 + r_0^3 - 3r^2 r_0}{3r_0 a} \tag{23}$$

V některých řešeních se pracovalo s pojmem energie blány, který lze definovat pouze na základě tohoto vztahu. V žádném případě neplatí pro energii vztah obdobný vztahu pro energii povrchu kapaliny ($E = \sigma S$). Dále ukážeme, že tento vztah neodporuje zákonu zachování energie. Vypočítáme plošnou hustotu energie

$$\varepsilon = \frac{E}{S} = \frac{2r}{3ar_0} + \frac{r_0^2}{3ar^2} - \frac{1}{a} \tag{24}$$

Plošná hustota energie je tedy funkcí závislou pouze na poměru r a r_0 a tedy pro energii jakékoliv části blány, jejíž obsah je S, platí $E = \varepsilon S$. Rozdělili bychom původní blánu na n částí, každou bychom roztáhli samostatně ve stejném poměru a znovu je spojili. Vykonali bychom stejnou práci, jako kdybychom roztahovali přímo původní blánu. Platí tedy zákon zachování energie.

Daniel Kráľ & Jirka Franta

Úloha I . 6 ... *výše mého domova...* *(7 bodů, řešilo 106 studentů)*

Úvodem několik slov k bodování. Úloha byla experimentální. Zadání znělo „**změřte** výšku vašeho bydliště co nejvíce způsoby a výsledky **porovnejte**.“ Měřit znamená skutečně provést měření nějakou metodou, která nám může dát rozumné výsledky. Část z vás to ne zcela pochopila a jim jsou určena další slova. Asi polovina vámi navržených metod byla zcela neproveditelná, anebo jste se je vůbec ani nepokusili provést, takže jste ani nemohli určit, jak by asi byly ve skutečnosti přesné a jestli by vůbec byly použitelné. Tuto polovinu metod jsme hodnotili počtem bodů 0 (max. 1 za hodně dobré postřehy), neboť vám ostatně zpravidla nedaly žádnou práci ani poučení. (Nicméně nad některými jsme se pěkně pobavili.) Důvodem, proč je v každé sérii FKS experimentálka, je, abyste se naučili měřit a výsledky měření zpracovat. Fyzika není jenom teorie – vždycky se musí opírat o pokus a pozorování. Pokud nějaká teorie odporuje pozorování, pak je něco špatně. Experiment zkrátka patří k fyzice právě tak jako teorie. Dost filosofování – chtěli jsme říci, že při hodnocení záleželo zejména na počtu **provedených** měření, počtu vyzkoušených metod, diskusi metod a také formě, ve které jste své výsledky prezentovali. Jelikož nikdo nedosáhl plného počtu bodů, což znamenalo minimálně 5 metod (s plnou teorií, naměřenými hodnotami, chybami a diskusí), dopadlo bodování tak, jak si můžete prohlédnout v pořadí.

Varování pro teoretiky. Propříště ta řešení exp. úlohy, která nebudou obsahovat skutečně naměřené hodnoty, budeme hodnotit počtem bodů 0. Rovněž bude věnována značná pozornost formě řešení. **Vypracování experimentální úlohy by mělo obsahovat na začátku trochu teorie popisující danou problematiku, následuje stručný, ale srozumitelný (jednoznačný) popis měření, na škodu není výčet pomůcek. Nezbytná je tabulka naměřených hodnot a výpočet odchylky měření (viz Chyby měření). Stejně nezbytný je závěr a diskuse získaných výsledků, kde diskutujete proč vám co jak vyšlo, srovnáváte metody apod.** Pokuste se tyto základní body příště neopomenout. To, že jsem v autorském řešení takto nevypracoval všechny metody, je dáno pouze nedostatkem místa; přečtěte si především první dvě metody, které mají všechny základní náležitosti.

Jak si někteří z vás všimli, zadání úlohy bylo poměrně nejednoznačné. Záleželo tedy víceméně na vás, co jste si definovali jako bydliště a jak jste definovali jeho výšku. Pod pojmem bydliště jste rozuměli: dům, byt, prostor kam oko dohlédne. Pod pojmem výška bydliště jste rozuměli

1) výšku domu
   - od nejnižšího bodu základů po nejvyšší bod střechy nebo komín,
   - od jeho paty po nejvyšší bod střechy nebo komín,
   - od nejnižší podlahy v domě po nejvýš. bod střechy nebo komín;
2) výšku bytu
   - tzv. světlou výšku, tj. vzdálenost vymezenou horní plochou podlahy a podhledem stropu,
   - tzv. výšku konstrukční, tj. vzdálenost sobě vzájemně odpovídajících úrovní dvou po sobě následujících stropních konstrukcí (bývá uvažována od horní plochy podlahy),
   - výšku parapetu okna vašeho bytu nad patou domu;
3) nadmořskou výšku některé části domu (takto interpretovalo zadání minimum řešitelů, proto tuto interpretaci v autorském řešení nenajdete).

METODY MĚŘENÍ

Vypíšeme výšku domu z plánu. Tak to je vlastně opis měření, které za nás provedl někdo jiný. Nicméně jako kontrola je to dobré.

Odhady

Ty jste činili velmi často, avšak odhad nemá s měřením mnoho společného, neboť je subjektivní.

Měření přímé

Různé obměny tohoto řešení napadly snad každého, jen málo z vás však skutečně přímo měřilo.

Teorie: Pro naše měření je vhodné stavební pásmo, které mívá délku několika desítek metrů a bývá dělené po 1 mm. Při měření délky 1 metru pásmem se dopouštíme chyby asi 1 mm.

Pomůcky: pásmo, olovnice, kamarád.

Popis měření: Vylezeme na střechu a pásmo spustíme k patě domu asistentovi, který jeho konec přiloží k zemi tak, aby pásmo bylo napnuté a svislé. Svislost lze kontrolovat vedle spuštěnou olovnicí. Alternativně lze použít dlouhý žebřík a odměřit výšku metrem (pásmem) po částech postupným přikládáním. Já jsem měřil pomocí pásma a pomocníka (ségry).

Tabulka naměřených hodnot:

Měření	h/m	Δh_i/m	$(\Delta h_i)^2$/m^2
1	5,99	+0,00	0,0000
2	6,00	−0,01	0,0001
3	6,00	−0,01	0,0001
4	5,98	+0,01	0,0001
5	5,99	+0,00	0,0000
6	6,00	−0,01	0,0001
7	5,98	+0,01	0,0001
8	6,00	−0,01	0,0001
9	5,98	+0,01	0,0001
10	5,99	+0,00	0,0000

Aritmetický průměr je $\overline{h} = 5{,}99\,\mathrm{m}$.
Výpočet odchylky:
Standardní odchylka $s(h) = 0{,}009\,\mathrm{m}$.
K hrubé chybě podle 3–s kritéria nedošlo.
Směrodatná odchylka $s(\overline{h}) = 0{,}003\,\mathrm{m}$.
Systematická chyba je asi $s_{sys} = 0{,}01\,\mathrm{m}$.
Celková chyba $s_{celkov} = 0{,}013\,\mathrm{m} \approx 0{,}01\,\mathrm{m}$.
Skutečná výška domu $h = (5,99 \pm 0{,}01)$ m.

Diskuse: Měření dává poměrně příznivou celkovou chybu. Systematická chyba je dána tím, že se nepovede držet pásmo přesně svisle a také tím, že i když se pásmo prodlužuje jen minimálně, může se trochu prohýbat, pokud jej málo napínáme.

Obměny přímého měření

(i) Měření „per partes“ neboli „po částech“: Změříme výšku jednoho bytu (patra) v domě, kde se opakuje více pater stejné výšky, a násobíme počtem pater. Přičteme výšky neperiodických partií, které odměříme zvlášť. Možné je též u paneláku změřit výšku panelu zvenku. Chyba měření roste s rostoucím počtem dílů, na které si dům rozdělíme, protože se zvýší počet měření.

(ii) Jsou-li v domě schody (stejné), změříme výšku jednoho schodu a násobíme počtem schodů. Zvlášť změříme výšku nezaschoděných partií domu. Chyba je opět větší než u prostého přímého měření. Navíc tu používáme předpokladu, že všechny schody mají stejnou výšku, což nám nikdo nezaručí.

Měření pomocí provázku

Teorie: Idea – porovnáním délky provázku a předmětu a porovnáním délky provázku a měřidla lze změřit délku předmětu.

Postup: Ze střechy, resp. jiného nejvyššího bodu, jehož výšku nad patou domu chceme měřit, spustíme na provázku závaží. Závaží se dole musí dotýkat země a zároveň provázek musí zůstat napnutý. Nahoře v úrovni bodu, jehož výšku měříme, učiníme na provázku značku (uzlík, fix, kolíček na prádlo). Potom provázek rozložíme někde na podlaze a přikládáním měřidla délky zjistíme délku provázku včetně závaží až ke značce.

Pomůcky: provázek, závaží, měřidlo délky (metr, pásmo).

Tabulka naměřených hodnot:

Měření	h/m	Δh_i/m	$(\Delta h_i)^2$/m^2
1	5,95	+0,03	0,0009
2	5,96	+0,02	0,0004
3	5,98	+0,00	0,0000
4	6,00	−0,02	0,0004
5	5,99	−0,01	0,0001
6	5,97	+0,01	0,0001
7	5,94	+0,04	0,0016
8	5,99	−0,01	0,0001
9	6,02	−0,04	0,0016
10	5,97	+0,01	0,0001

Aritmetický průměr je $\overline{h} = 5{,}98\,\mathrm{m}$.
Výpočet odchylky:
Standardní odchylka $s(h) = 0{,}02\,\mathrm{m}$.
K hrubé chybě podle 3–s kritéria nedošlo.
Směrodatná odchylka $s(\overline{h}) = 0{,}008\,\mathrm{m}$.
Systematická chyba je asi $s_{sys} = 0{,}03\,\mathrm{m}$.
Celková chyba $s_{celkov} = 0{,}04\,\mathrm{m}$.
Skutečná výška domu $h = (5{,}98 \pm 0{,}04)\,\mathrm{m}$.

Diskuse: Při měření dochází k napínání a prodlužování provázku, při srovnání provázku s měřidlem pak provázek je napnutý podstatně méně. Zejména proto nám vyšla průměrná hodnota menší než při přímém měření. Systematická chyba – pro daný provázek jsem odhadl, že 1 m se tahem prodlouží asi o 2 mm, dále jsem připočetl asi 2 cm na různé chyby při tvoření značky a porovnávání provázku s metrem.

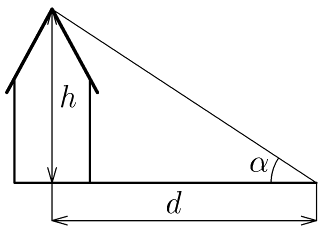
Tak to byla dvě měření vzorová skoro se vším všudy (to jest s trochou teorie, popisem měření a potřebných pomůcek, naměř. hodnotami v tabulce, výpočtem odchylek, určením skutečné výšky domu a diskusí. Z důvodu úspory místa dále uvedu už jen stručný popis jednotlivých metod. Vy ovšem nejste ničím omezeni, takže ve svých řešeních uvádějte vše (chcete-li více bodů)!

Trigonometrické metody

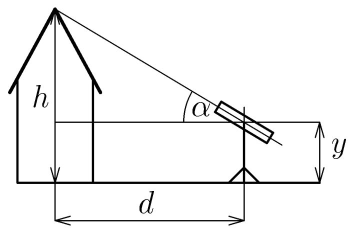
Těchto metod jste uváděli snad nejvíce. Mají většinou tu společnou nevýhodu, že nepočítají s nerovností terénu v určitém okolí domu.

1) Měření úhlů

Nechť okolí domu je vodorovná rovina. Odejděme do vzdálenosti d od průmětu nejvyššího bodu domu do vodorovné roviny. V této vzdálenosti na zemi změřme úhloměrem úhel α, pod kterým vidíme nejvyšší bod domu nad vodorovnou rovinou okolí (obr. 5). Platí $h = d \operatorname{tg} \alpha$. Chyba měření spočívá zejména v praktické nerovnosti terénu (tomu lze odpomoci vhodným užitím vodováhy) a v poměrně nepřesném měření úhlu.



Obr. 5



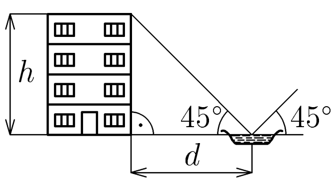
Obr. 6

Obměny:

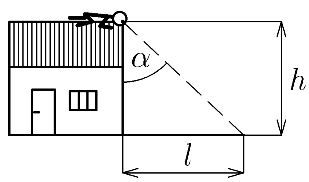
(i) Do různých vzdáleností d od průmětu vrcholu domu stavíme astronom. dalekohled a zaměřujeme jej na nejv. bod (obr. 6). Na stupnici azimutální montáže dalekohledu odečteme úhel α. Délkovým měřidlem změříme výšku y průsečíku osy hledáčku a osy stativu nad zemí. Výška domu $h = x \operatorname{tg} \alpha + y$.

(ii) Pomocí odrazu v talíři s vodou (obr. 7). Do misky nalijeme vodu. Pak misku poponášíme těsně nad zemí směrem od domu a díváme se do ní pod úhlem 45° vzhledem k rovině hladiny (úhloměr). S miskou jdeme tak daleko, dokud v ní nevidíme odraz špičky domu. Potom změříme pásmem vzd. misky od domu – to je výška domu. Chyby: zejména při měř. úhlu. Pozn.: místo vody lze užít rovinné zrcadlo – potom máme ale nový problém zajistit jeho vodorovnost.

(iii) Shora zjišťujeme, pod jakým úhlem vůči normále se nám jeví úsečka délky l vyznačená na zemi kolmo ke zdi domu (obr. 8).



Obr. 7



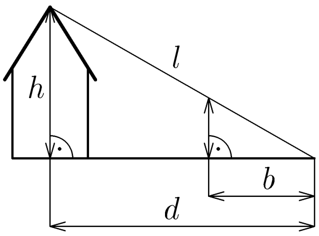
Obr. 8

2) Zákrytová pozorování

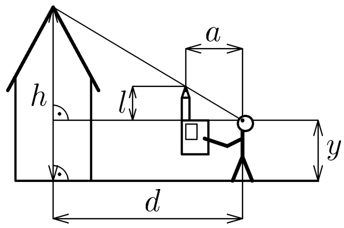
(i) Metoda J. Verna (z knihy Tajuplný ostrov). Zde se ukázala velká sečtělost několika řešitelů. Metoda je též uvedena v knize Dva divoši od E. T. Setona. Do země před dům zabodneme do země svisle tyčku. Pak si lehneme na zem a posouváme se tak dlouho, dokud nebude naše oko, vrchol tyče a vrchol střechy ležet v jedné přímce (obr. 9). Pak změříme výšku tyče l, vzdálenost b oka od tyče a vzd. d oka od domu. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků je výška domu $h = d\frac{l}{b}$. Chyba měření plyne zejména z nerovností terénu, z určování polohy oka a z měření délek d, l.

Poznámka: speciálně, je-li $l = 1$ m, pak $h = \frac{d}{b}$.

Obměna: Oko přiložím k zemi blíž k tyčce než v předchozím. Kamarád potom vyznačí na tyčce bod, který mi zakrývá vrchol domu. Jako l pak uvažuji výšku značky nad zemí.



Obr. 9



Obr. 10

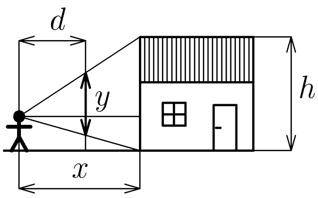
(ii) Skautský způsob. Stoupneme si dostatečně daleko od domu. Zápisník podržme vodorovně před okem, vysuneme kolmo k němu tužku tak, abychom přes její špičku viděli vrchol domu (obr. 10) – pak opět užijeme podobnost.

(iii) Další zákryt. Viz obr. 11. Z podobnosti trojúhelníků plyne $h = \frac{y}{d}x$.

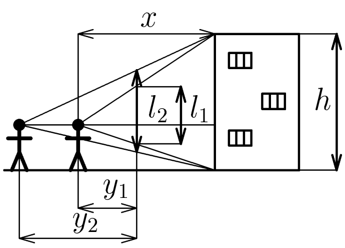
(iv) Srovnávací zákrytové pozorování (obr. 12). Z podobnosti trojúhelníků odvodíme

$$h = \frac{l_1 l_2 (y_2 - y_1)}{l_1 y_2 - l_2 y_1}\,.$$

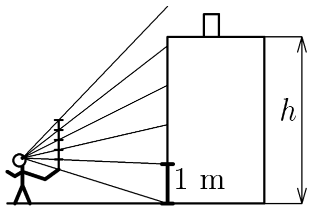
Výhoda oproti předchozímu – nemusíme měřit naši vzdálenost x od domu.



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

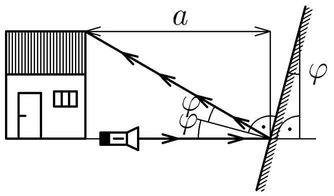
(v) Pomocí tužky. Na domě vyznačíme svisle od země úsečku délky 1 m. Stoupneme si do velké (vhodné) vzd. od domu a před oči umístíme svisle tužku tak, aby nám právě zakrývala úsečku vyznač. na domě. Potom zjistíme tužkou, kolikrát se tato úsečka vejde do výšky domu (obr. 13). Jde o nanášení míry v nějakém poměru.

Chyby: z obr. 13 vidíme, že čím stojí člověk dál od domu, tím jsou jednotlivé trojúhelníky vzáj. podobnější, a tedy tužka přesněji kryje 1 m.

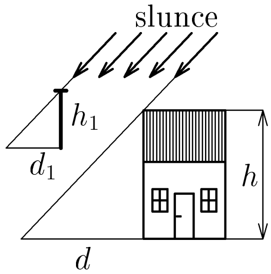
Další chyby: problém dodržet stálou vzdálenost tužky od očí a odhadnout, kde končil předchozí zákryt tužky, když posouváme tužku o jednu její délku výše. Lze použít i fotoaparátu a z fotografie pak odečítat jednotlivé poměry.

3) Zrcátková metoda

Viz obr. 14. Baterku položme na zem, aby svítila vodorovně kolmo od stěny domu. V ose baterky umístíme zrcadlo dle obr. 14 pod takovým úhlem φ vůči normále, aby vrhalo "prasátko" na nejvyšší bod domu. Změřme úhel φ a vzdálenost a průmětu vrcholu domu od bodu odrazu paprsku na zrcadle. Platí zřejmě $h = a \cdot \tan(2\varphi)$.



Obr. 14



Obr. 15

Stínové metody a pozorování hvězd

Tyto metody jsou většinou totožné s některými z předchozích trigonometrických. Některé navíc předpokládají znalost výšky někt. nebeských těles nad obzorem v urč. dobu, což je zbytečně komplikované a vnáší to do měření další chyby.

1) Srovnávání délek slunečního stínu

Kolmo k vodorovné rovině postavíme tyčku, změříme její výšku h_1, délku jejího stínu d_1 a délku stínu domu d. Výška domu je potom $h = h_1 \frac{d}{d_1}$, jak nahlédneme z obr. 15. Nevýhody: nehodí se pro domy v nerovném terénu, obestavěné, vrhající stín na frekventovanou silnici, nebo např. s mírným sklonem střechy, jejíž vrchol vrhá stín pouze krátce po východu a těsně před západem slunce, a to ještě někam hodně daleko, metoda závisí na přízni počasí. Chyby vznikají nerovnostmi terénu, ale také neostrostí stínu, neboť Slunce má na obloze dost velkou úhlovou velikost.

2) Deklinace nebeských těles

Změříme délku slunečního stínu domu, resp. vzdálenost d takového místa od domu, z něhož je vidět nebeské těleso přesně za vrcholem domu. Výška domu je pak $h = d \operatorname{tg} \alpha$, kde α je výška nebeského tělesa nad obzorem, $\alpha = 90^\circ - \varphi + \delta$, kde δ je příslušná deklinace v danou dobu a φ naše zeměpisná šířka. Nevýhody metody: potřebujeme znát φ a δ, což je jednak zbytečně složité a jednak to zvětšuje chybu měření. V tabulkách (astronomické ročence aj.) vlastně hledáme údaje, které za nás naměřil někdo jiný. Poznámka 1.: Oproti takovým tělesům, jako je Slunce a Měsíc, má velice ostrý stín např. Venuše. Vhodná je také např. Polárka. Poznámka 2.: Problému přímého měření délky jsme se touto složitou metodou stejně nezbavili, pouze jsme převedli měření svislé délky na měření délky vodorovné.

Mechanické metody.

1) Výtah

Známe-li provozní rychlost výtahu v, změříme stopkami dobu t, za kterou výtah urazí nějakou část výšky domu, když už je rozjetý; tato část má potom výšku $s = vt$. Zbylé partie, kam výtah nejede a kde jede zrychleně, změříme jinak. Tak toto měření je silně nepřesné a chci vidět, kde vezmete velikost rychlosti výtahu.

2) Valení po nakloněné rovině

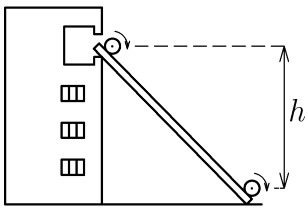
Viz obr. 16. O dům opřeme fošnu, aby její konec sahal až do bodu, jehož výšku chceme měřit. Po fošně necháme valit kouli/válec. Změříme stopkami dobu valivého pohybu po fošně, změříme hmotnost tělesa a změříme délku fošny. Poznámka: použitelné pro menší domy. Nevýhody: přímému měření se nevyhneme a ještě způsobíme velkou chybu při měření času a zanedbáním odporu vzduchu a tření.

3) Matematické kyvadlo

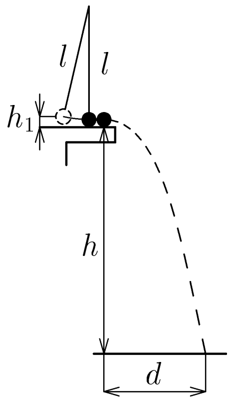
Tenký provázek zatížený na konci malým těžkým závažím spustíme podél měřené stěny. Nahoře provázek upevníme a takto vzniklé kyvadlo rozhoupeme s malou výchylkou. Důležité je, aby těžiště závaží bylo v rovnovážné poloze těsně nad zemí (ještě lepší je vyhrabat tam důlek). Stopkami změříme dobu kyvu (nejlépe tak, že změříme dobu více kyvů a dělíme ji jejich počtem). Jako model můžeme použít s malou chybou kyvadlo matematické, pro které

$$h = l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}\,,$$

kde T je perioda, l délka závěsu, h výška domu. Chyby závisí na konkrétních parametrech kyvadla – odpor vzduchu, kyvadlo je fysikální, chyba při měření času (malá).



Obr. 16



Obr. 17

4) Pružné kuličky

Vytvořme matematické kyvadlo o délce závěsu l tak, aby kulička v rovnovážné poloze byla v nejvyš. bodě domu (viz obr. 17). Do tohoto bodu položíme druhou, identickou kuličku. První kuličku z nějaké výchylky pustíme, ta pružně narazí do druhé a udělí jí počáteční rychlost ve vodorovném směru. Druhá kulička tedy koná vodorovný vrh. Změřme h_1, d. Potom za předpokladu ideální pružnosti kuliček a užitím zákona zach. energie dostaneme

$$h = \frac{1}{4}\frac{d^2}{h_1}\,.$$

Chyba závisí na dvou podstatných věcech: jak dalece je ráz kuliček pružný ve skutečnosti a jak velký je odpor vzduchu při pohybu kuliček.

5) Odrazy míčku

Míček pustíme z výšky a na stejný povrch, na kterém budeme měřit výšku domu. Výšku b, do které míček po odrazu vystoupí, změříme. Koeficient restituce míčku je $c = \dfrac{b}{a}$. Pak pustíme týž míček na týž povrch z nejvyššího bodu domu a změříme, do jaké výšky b_1 po odrazu vystoupí. Výšku domu h určíme z toho, že koef. restituce $c = \dfrac{b_1}{h}$ předpokládáme v obou případech týž. Je tedy $h = b_1\frac{a}{b}$. Chyby: zanedbáváme odpor vzduchu a špatně se měří výška, kam míček vystoupí po odrazu.

Pády – speciální mechanické metody

1) Volný pád malého předmětu se zanedbáním odporu prostředí

Dobu pádu měříme stopkami. Výška domu je v tomto modelu úměrná druhé mocnině času, proto chyba roste lineárně s dobou pádu. Jisté výpovědní hodnoty výsledku dosáhneme při větších výškách domu pro aerodynamické tvary padajícího předmětu.

2) Volný pád s odporem vzduchu

Zde necháme padat předmět s malou hmotností, velkým součinitelem odporu a většími rozměry. Pustíme např. kulový míček (balónek) z nejvyš. bodu domu. Rychlost míčku se velmi rychle ustálí na určité hodnotě, pohyb balónku můžeme s malou chybou považovat za rovnoměrný. Síly tíhová $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$, vztlaková $\boldsymbol{F}_{vz} - V\varrho\boldsymbol{g}$ a odporová

$$\boldsymbol{F}_{odp} = -\frac{1}{2}C\varrho S\, v^2$$

jsou během rovnoměrného přímočarého pohybu v rovnováze, na těleso působí nulová celková síla. (m je hmotnost míčku, g velikost tíhového zrychlení, V objem míčku, ϱ hustota vzduchu a C je součinitel odporu tělesa – pro kouli $C \approx 0{,}48$.) Odtud snadno

$$h = \sqrt{\frac{2t^2(mg - \frac{4}{3}\pi R^3\varrho g)}{C\pi R^2\varrho}}\,,$$

kde R je poloměr míčku (balónku), t doba pohybu.

Vylepšení: míček vyhodíme svisle vzhůru nad nejvyšší bod domu, aby měl při pádu v jeho úrovni téměř stálou rychlost.

Chyby: měříme čas (asi 0,2 s), poloměr balónku (nevelká chyba, je-li dost kulový), hmotnost balónku se vzduchem.

Hydromechanika

1) Objem okapu

Okap nebo svisle podél domu nataženou hadici naplníme po úroveň bodu, jehož výšku měříme, vodou. Buď už při nalévání anebo při vylití do nějaké nádoby zjistíme objem V okapu/hadice. Poloměr R okapu změříme šuplerou. Výška pak zřejmě

$$h = \frac{V}{\pi R^2}\,.$$

Chyby nastanou při měření objemu, při prohnutí nebo prodloužení hadice. Problém – pro vysoké domy sehnat vhodnou hadici, dost vody a zařízení, které by tu hadici udrželo …

2) Hydrostatika

Hadici (okap) naplníme vodou jako v předchozím, ale dolů umístíme manometr, kterým změříme hydrostatický tlak, který nezávisí na průřezu hadice apod., ale jen a pouze na výšce hladiny nad manometrem. Výška hladiny je

$$h = \frac{p}{\varrho g}\,.$$

Chyby vzniknou zejména při měření menších tlaků.

3) Hydrodynamika

Zacpeme zdola okap a naplníme jej vodou jako v předchozím. Po uvolnění dolního konce měříme rychlost vytékající vody (např. tak, že změříme, za jak dlouho se naplní malá nádoba přistavená pod okap). Původní výšku hladiny pak vypočteme z Bernoulliho rovnice.

Elektromagnetické metody – např. odporem drátu

Svisle podél stěny domu natáhneme tam a zpět drát konst. průřezu. Změříme jeho el. odpor R. Potom změříme odpor R_0 kusu téhož drátu délky l_0. Platí

$$R_0 = \varrho\frac{l_0}{S}, \quad R = \varrho\frac{l}{S} \quad \to \quad h = \frac{l}{2} = \frac{Rl_0}{2R_0}\,,$$

kde ϱ je rezistivita materiálu, z něhož je drát vyroben. Chyba metody závisí na tom, jak šikovně ji provedeme. Jestliže je totiž odpor kusu drátu délky l_0 malý (třeba $10^{-3}\,\Omega$), tak výsledek měření takového odporu přímo ohmmetrem je katastrofálně nepřesný (chyby třeba 500% – výborný generátor náhodných čísel). Buď tedy musíme použít drát s mnohem větší rezistivitou, anebo odpor krátké části drátu měřit šikovněji – najděte si někde, co je to tzv.

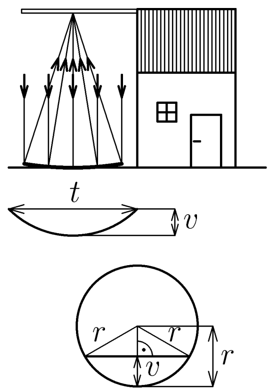
Ohmova metoda (drátem se pouští velký proud a měří se napětí přímo mezi dvěma body drátu, jejichž vzdálenost je l_0). Když toto vyřešíme, můžeme provést celkem přesné měření.

Metoda korýtkového zrcadla

Dle obr. 18 umisťme na štít domu vodorovnou desku. Kus pozinkovaného plechu tvaru obdélníku ohneme na zemi pod deskou v část pláště válce tak, aby paprsky vrhané sluncem soustředěny byly tímto „korýtkovým zrcátkem“ do jedné co nejostřejší přímky na desku. Změřme pak parametry zrcadla (tětivu t, výšku v) a spočtěme poloměr R kružnice, jejíž část je řezem korýtka:

$$R = \frac{t^2}{8v} + \frac{v}{2}\,.$$

Chyby mohou být značné vzhledem k tomu, že ohnout plech do daného tvaru je nesnadné, nicméně tato metoda byla skutečně realizována.



Obr. 18

Některé neprovedené, ale proveditelné metody

Doba, za kterou urazí vzdálenost zvuková vlna (ozvěna, mikrofon); určení frekvence tónu vydávaného po úderu do trubky stejné délky, jako je výška domu; různá využití čoček a zrcadel; na zemi měříme v noci intenzitu světla ze zdroje na střeše expozimetrem atd. atd.

Metody krajně nerealistické

Jakákoli použití obecné teorie relativity; měření frekvence fotonu puštěného z vrcholu domu nahoře a dole; práce námi vykonaná při vynesení 1kg od přízemí na střechu; různý bod varu vody a rozdíl tlaku v týž okamžik v různých výškách je pro objekty typu dům příliš malý, lze je použít pouze pro měření výšky nadmořské; odchylka volně padajícího tělesa vlivem působení Coriolisovy síly; rozdíl grav. zrychlení v různých výškách; měření času, za který uletí danou vzdálenost světlo, při použití běžně dostupných pomůcek …

Závěr

Jak vidíte, metod je skutečně přehršel. Avšak ne všechny dávají uspokojivé výsledky. Přesnost většiny metod ovšem záleží na jejich konkrétní realizaci, takže by nemělo smysl zde např. obecně „seřadit“ uvedené metody podle přesnosti. Osobně jsem obdržel dobré výsledky u přímého měření, jen o trochu méně přesné při měření provázkem; metody používající měření úhlu jsou méně přesné (tam jsem dostal až 10% chybu), pády jsem shledal dost nepřesnými atd. Úskalí jednotlivých metod jsem se snažil diskutovat přímo u jejich popisu.

Výčet metod pro měření výšky nadmořské

Využití závislosti tlaku vzduchu na nadm. výšce, měření teploty varu chem. čisté vody, srovnání s místy se známou nadm. výškou (sem patří též využití nivelačních značek), využití závislosti hustoty vzduchu na nadm. výšce. Vyčtení z vrstevnic na mapě nepovažuji za měření (aspoň ne za naše).

CHYBY MĚŘENÍ

Protože se ukázalo, že velká část z vás se dosud neseznámila s tím, jak se používají odchylky měření, dovolujeme si připojit několik základních základních poznatků z teorie chyb.

Chyby systematické

Jde chyby způsobené použitou metodou, měřícími přístroji a některé chyby experimentující osoby. Systematické chyby zkreslují zpravidla výsledek k trvale vyšším nebo trvale nižším hodnotám než je hodnota skutečná.

Chyby metody

Např. měříme-li výšku domu provázkem, který se během měření o hodně protáhne a pak při porovnávání s metrem (pásmem) je mnohem kratší, zákonitě obdržíme menší výšku domu, než je skutečná.

Chyba měřidla

Dílky na pásmu mají vzdálenost ne přesně 1mm, ale třeba 1,001 mm. Nedokonalost a nepřesnost stupnic.

Některé chyby osobní

Někdo při odečítání ze stupnice zaokrouhluje měřenou hodnotu mezi dvěma dílky nahoru, někdo dolů. **Systematické chyby nelze zmírnit velkým počtem měření !** (viz příklady.) Chyby měřidla se dají zmírnit pouze použitím jiného měřidla (lepšího). Chyby osobní lze z velké části odstranit tím, že dáme veličinu měřit za stejných podmínek více různým osobám. Chybu metody lze vyloučit jedině tak, že použijeme jinou metodu.

Chyby náhodné

Opakujeme-li za týchž podmínek měření téže veličiny, shledáme, že jednotlivé výsledky se navzájem poněkud liší. Měření je ovlivněno např. náhodnými změnami tlaku vzduchu, prouděním vzduchu, malými změnami teploty, změnou polohy oka při měření, přítomností prachu při měření hmotnosti … Takových navzájem nezávislých vlivů bývá mnoho a těžko bychom hledali přesnou příčinu takové konkrétní odchylky (tj. který vliv a o kolik přesně nám výsledek „posunul“), proto původ náhodných chyb vidíme skutečně v náhodě.

Chyby hrubé

Jsou to velké chyby, které vznikají nedostatečným soustředěním pozorovatele na měření. Objevíme je, jestliže měření vícekrát opakujeme (jak → viz dále). Měření zatížené hrubou chybou vypustíme ze souboru naměřených hodnot.

Zpracování výsledků měření postačující k řešení experimentálky FKS

Předkládáme vám jednoduchý algoritmus, který vám doporučujeme užít pro zpracování **dostatečného počtu** (deseti a více) měření. Body 1) až 5) se týkají pouze chyby statistické.

1) Určíme z naměřených hodnot aritmetický průměr

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \,.$$

Dá se ukázat, že pro nekonečně mnoho měření se aritmetický průměr ztotožňuje se střední hodnotou měřené veličiny (viz literaturu).

2) Stanovíme pro každou naměřenou hodnotu její zdánlivou chybu $\Delta x_i = \overline{x} - x_i$.

3) Vypočteme standardní odchylku

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i)^2}$$

4) Vyloučíme hrubé chyby. K tomu se používá tzv. 3–s kritérium: vyloučíme ty naměřené hodnoty, které se od aritmetického průměru $\overline{x}$ odchylují o více než $3s$ a opakujeme body 1) až 4).

5) Určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru (statistickou chybu)

$$s(\overline{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i)^2},$$

kde N je počet naměřených hodnot po vyloučení hrubých chyb.

6) Určíme systematickou chybu. Za chybu přístrojů můžeme považovat např. polovinu dílku stupnice. Chybu metody, není-li možné ji vypočíst, je nutno ji aspoň nějak fundovaně odhadnout !!!
7) Určíme celkovou odchylku buď podle vzorce

$$s_{celk} = \sqrt{(3s_{stat})^2 + (s_{syst})^2}$$

nebo pro malý počet měření použijeme přibližného vzorce

$$s_{celk} = 3s_{stat} + s_{sys}\,.$$

8) Chybu zaokrouhlíme na jedno platné místo, výjimečně na dvě platná místa, začíná-li dekadický zápis chyby na jedničku. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na číslici stejného řádu, jako je nejnižší platné místo chyby.
9) Výslednou hodnotu uvádíme ve tvaru

$$x = (\overline{x} \pm s_{celk})\,.$$

Ještě byste měli vědět, k čemu vůbec nějaké odchylky počítat. Odchylka nám říká, jak přesně jsme veličinu změřili a jak je pravděpodobné, že skutečná hodnota leží v námi určeném intervalu. Dá se odvodit, že výsledek leží s pravděpodobností 99,7% v intervalu $\langle \overline{x} - s_{celk}, \overline{x} + s_{celk}\rangle$.

Literatura:

J.Brož a kol.:Základy fysikálních měření (I) ,SPN Praha 1967, kapitola Chyby měření.
E. Svoboda: Přehled středoškolské fyziky, SPN, 1990.

Matouš Jirák* & *Budka

Řešení úlohy S . 1 ... *pojem hvězdné velikosti* *(7 bodů, řešilo 65 studentů)*

a) (1bod) Budeme-li se na Slunce dívat ze vzdálenosti 10 pc, bude poměr světelného toku Φ_{10} k světelnému toku Φ z normální vzdálenosti r roven poměru druhých mocnin vzdáleností

$$\Phi_{10}/\Phi = (r/10)^2\,,$$

kde r je vyjádřeno v parsecích. Dosazením do Pogsonovy rovnice dostaneme

$$M - m = -2{,}5\log\left(\frac{r}{10}\right)^2 = -5\log\frac{r}{10} = 5 - 5\log r\,.$$

Číselně pak $M = 4{,}83$.

b) (1bod) Protože oko dvojhvězdu nerozliší, vnímá ji jako jeden objekt o celkovém světelném toku

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B\,,$$

kde toky Φ_A,Φ_B odpovídají jednotlivým složkám dvojhvězdy. Z Pogsonovy rovnice obdržíme pro celkovou jasnost objektu m vztah

$$m - m_A = -2{,}5\log\frac{\Phi}{\Phi_A} = -2{,}5\log\left(1 + \frac{\Phi_B}{\Phi_A}\right)\,.$$

Poměr Φ_B/Φ_A získáme opět z Pogsonovy rovnice:

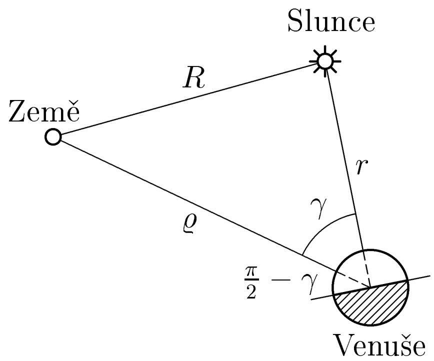
$$m_B - m_A = -2{,}5\log\frac{\Phi_B}{\Phi_A}\,, \qquad \text{neboli} \qquad \frac{\Phi_B}{\Phi_A} = 10^{0{,}4(m_A - m_B)}\,.$$

Pro celkovou jasnost dvojhvězdy tak dostáváme

$$m = m_A - 2{,}5\log\left(1 + 10^{0{,}4(m_A - m_B)}\right) = -2{,}5\log\left(10^{-0{,}4m_A} + 10^{-0{,}4m_B}\right) .$$

Číselně $m = 1{,}6$.

c) (2body) Prostým okem vnímáme na obloze Venuši jako bodový objekt. Jeho jasnost je určena celkovým zářivým tokem Φ dopadajícím na Zem od všech částí viditelného osvětleného povrchu Venuše. Podle návodu k úloze budeme předpokládat jasnost viditelného povrchu za konstantní, tj.



Obr. 19

$$\Phi \sim \frac{S}{\rho^2} ,$$

kde S je plocha viditelné osvětlené části Venuše (přesněji její projekce při pohledu ze Země) a ρ je vzdálenost Venuše od Země. Tento předpoklad nemusí být zase tak špatný, při pohledu dalekohledem na Venuši vypadá její osvětlená část skutečně stejně jasná.

Hranice světla a stínu vymezuje na povrchu Venuše kružnici. Tu vidíme ze Země pod úhlem $\frac{\pi}{2} - \gamma$, kde γ je úhel Slunce–Venuše–Země (viz obr. 19). Proto jsou rozměry kružnice v jednom směru zkráceny

$$|\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)| = |\cos\gamma| \text{ krát.}$$

Její plocha pak je

$$S_O = |\cos\gamma|\pi R_V^2 ,$$

kde R_V představuje poloměr Venuše. Pro $\gamma < \frac{\pi}{2}$ můžeme psát

$$S = \frac{1}{2}\pi R_V^2 + \frac{1}{2}S_O$$

a pro $\gamma > \frac{\pi}{2}$ pak

$$S = \frac{1}{2}\pi R_V^2 - \frac{1}{2}S_O .$$

Celkově tedy

$$S = \frac{1}{2}\pi R_V^2(1 + \cos\gamma) .$$

Velikost úhlu γ vyjádříme z kosinové věty:

$$\cos\gamma = \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2\rho r} .$$

Pro celkový tok Φ dopadající na Zem tak dostáváme

$$\Phi \sim \frac{1 + \cos\gamma}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2\rho^3 r} . \tag{25}$$

Vzdálenost ρ_0, ve které je Venuše nejjasnější, teď můžeme určit buď z grafu a nebo pomocí diferenciálního počtu. Derivace toku Φ podle vzdálenosti ρ musí být v místě maxima nulová:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\rho} = \frac{3R^2 - \rho^2 - 3r^2 - 4\rho r}{2\rho^4 r}, \text{ takže} \qquad 3R^2 - \rho_0^2 - 3r^2 - 4\rho_0 r = 0 .$$

Vyřešením této kvadratické rovnice (a po zamítnutí záporného kořenu) nakonec dostáváme

$$\rho_0 = \sqrt{3R^2 + r^2} - 2r\,.$$

Ještě bychom pomocí druhé derivace měli ověřit, že se jedná skutečně o maximum. To už ale nechám na vás.

Číselná hodnota $\rho_0 = 0{,}43\,\mathrm{AU}$ kupodivu docela přesně odpovídá skutečnosti.

d) (2body) Je-li Venuše na obloze od Slunce úhlově nejdál, jeví se na obloze buď v 1. nebo 3. čtvrti, neboli úhel Slunce–Venuše–Země je pravý. Tok Φ_V dopadající na Zemi bude úměrný albedu a, slunečnímu toku $W(r)$ ve vzdálenosti r od Slunce, osvětlené, ze Země viditelné, ploše S a nepřímo úměrný povrchu polokoule $2\pi\rho^2$ o poloměru ρ rovném vzdálenosti Venuše od Země (což odpovídá předpokladu, že se odražené sluneční světlo rovnoměrně rozptýlí do celého poloprostoru).

Osvětlená, ze Země viditelná, část povrchu má z pohledu Slunce plochu

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi R_V^2\,.$$

Podle návodu k úloze bychom naopak měli za plochu S dosadit

$$S_2 = \frac{1}{4}4\pi R_V^2 = \pi R_V^2\,.$$

Z hlediska reality je první model přesnější, neboť $S_1 W(r)$ představuje energii, která dopadne na viditelnou část Venuše. Ani tento model však není dokonalý, protože se záření rozptyluje do většího prostorového úhlu než 2π. Samozřejmě i řešení s $S = S_2$ jsme ohodnotili plným počtem bodů.

Celkově máme pro tok dopadající na Zemi z Venuše:

$$\Phi_V = \frac{SaW(r)}{2\pi\rho^2}\,,$$

přičemž z Pythagorovy věty je $\rho^2 = R^2 - r^2$. Použitím Pogsonovy rovnice pro jasnost Venuše m_V a Slunce $m_\odot$ dostáváme:

$$m_V - m_\odot = -2.5\log\frac{\Phi_V}{W(R)}\,,$$

kde $W(R)$ je sluneční světelný tok dopadající na Zem, takže

$$\frac{W(r)}{W(R)} = \left(\frac{R}{r}\right)^2\,.$$

Po dosazení do Pogsonovy rovnice nakonec obdržíme

$$m_V = m_\odot - 2{,}5\log\frac{1}{2\pi}\frac{S}{R^2 - r^2}\frac{R^2}{r^2}a\,.$$

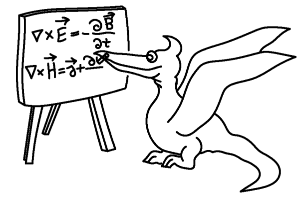
Číselná hodnota pro $S = S_1$ vyjde $m_V = -4{,}5$, což zase kupodivu skoro koresponduje se skutečností.

e) (1bod) Rovina rovníku svírá s rovinou horizontu úhel $90° - \phi$, kde ϕ je zeměpisná šířka. Rovina ekliptiky svírá s rovníkem úhel $\varepsilon = 23{,}5°$. Na obloze se tedy jeví jako kružnice, která s rovníkem svírá tentýž úhel ε. Slunce během roku opíše na obloze celou ekliptiku. V den letního slunovratu je nad rovníkem právě ve výšce ε, takže se v pravé poledne nachází nad horizontem nejvýše a to v

$$h_{max} = 90^\circ - \phi + \varepsilon$$

(číselně pro $\phi = 50^\circ$ je $h_{max} = 63{,}5^\circ$). Druhá část úlohy byla chyták. Nejmenší možná výška Slunce **nad** obzorem je 0° (v této poloze se alespoň v našich zeměpisných šířkách nachází během dne hned dvakrát), ale uznávali jsme i řešení s $h_{min} = -62{,}5^\circ$ (v této výšce se nachází o půlnoci v den zimního slunovratu).

Alexander Kupčo

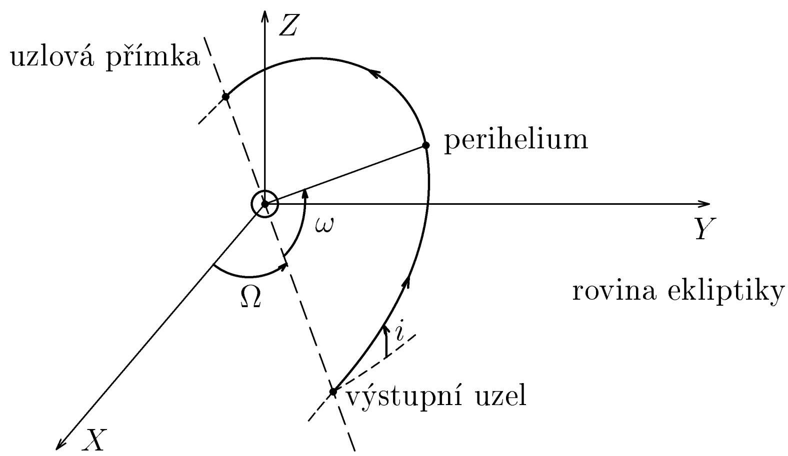


Seriál na pokračování

Kapitola 3

Nejprve bych se chtěl omluvit za chybu v obrázcích v 2. kapitole SNP. Vzdálenost ohniska F od středu elipsy S je samozřejmě $|SF| = ae$ a ne e. Doufám, že vás to moc nezmátlo.

V této kapitole se budeme věnovat předpovědi poloh planet na obloze. Pomocí tří čísel (velké poloosy a, excentricity e a okamžiku t_0 průchodu planety periheliem) už umíme určit polohu planety v rovině jejího oběhu. (Čtvrtou potřebnou veličinu, oběžnou dobu T, vypočteme z III. Keplerova zákona). Abychom mohli určit ekliptikální souřadnice planety, musíme nějak zadat umístění roviny oběhu planety vzhledem k ekliptice a jarnímu bodu γ. K tomu slouží tři úhly (viz. obr. 20). **Sklon dráhy** i je úhel, který svírá ekliptika s rovinou oběhu. Tato rovina protne ekliptiku v tzv. uzlové přímce. Bod, kde planeta vystupuje nad ekliptiku (tj. do severního poloprostoru) se nazývá **výstupní uzel**. **Délka výstupního uzlu** Ω je úhel svíraný směrem k jarnímu bodu a směrem k výstupnímu uzlu. Tyto dva úhly popisují polohu roviny oběhu. Ještě musíme zadat polohu perihelia, k čemuž slouží **argument perihelia** ω – úhel mezi směrem k periheliu a směrem k výstupnímu uzlu. Šest parametrů a, e, t_0, i, Ω, ω plně určuje pohyb planety a nazývají se **elementy dráhy**.

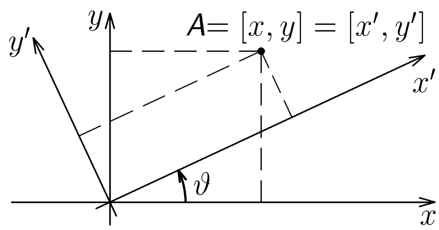


Obr. 20

Na obr. 20 jsme zavedli kartézské souřadnice X, Y, Z se středem ve Slunci $\odot$. Osu X jsme ztotožnili se směrem k jarnímu bodu γ a rovinu XY s ekliptikou. Zavedeme ještě další pravotočivé kartézské souředníce x, y, z tak, že ve středu je opět Slunce, osa x směřuje do perihelia a rovina xy odpovídá rovině oběhu planety. Z předchozí kapitoly SNP už umíme vypočítat polohu planety v této souřadné soustavě:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\upsilon\,, \\ y &= r\sin\upsilon\,, \\ z &= 0\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Celý další postup bude spočívat v tom, jak souřadnice planety $[x,y,z]$ převést do souřadnic $[X,Y,Z]$. K tomu budeme potřebovat vědět, jak od pravoúhlých souřadnic x, y přejít k souřadnicím x', y', které jsou otočeny vzhledem k původním o úhel ϑ (viz obr. 21).



Obr. 21

Není na tom nic těžkého (je to jenom geometrie), a tak odvození následujících vztahů nechám na vás:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta + y\sin\vartheta\,, \\ y' &= -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Nejprve naši soustavu x, y, z pootočíme kolem osy z o úhel $-\omega$. Tím ztotožníme osu x_1 s uzlovou přímkou:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos(-\omega) + y\sin(-\omega) &&= x\cos\omega - y\sin\omega\,, \\ y_1 &= -x\sin(-\omega) + y\cos(-\omega) &&= x\sin\omega + y\cos\omega\,, \\ z_1 &= z = 0\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Otočením kolem osy x_1 o úhel $-i$ ztotožníme rovinu x_2y_2 s ekliptikou:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1\,, \\ y_2 &= y_1\cos(-i) + z_1\sin(-i) &&= y_1\cos i\,, \\ z_2 &= -y_1\sin(-i) + z_1\cos(-i) &&= y_1\sin i\,. \end{aligned} \tag{29}$$

A otočením o úhel $-\Omega$ kolem osy z_2 ztotožníme osu x_3 se směrem k jarnímu bodu, čímž přejdeme k souřadnicím X, Y, Z:

$$\begin{aligned} X &= x_3 = x_2\cos(-\Omega) + y_2\sin(-\Omega) &&= x_2\cos\Omega - y_2\sin\Omega\,, \\ Y &= y_3 = -x_2\sin(-\Omega) + y_2\cos(-\Omega) &&= x_2\sin\Omega + y_2\cos\Omega\,, \\ Z &= z_3 = z_2\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Tím jsme obdrželi souřadnice planety vzhledem ke Slunci. Stejným způsobem spočteme souřadnice Země $[X_Z,Y_Z,Z_Z]$. Souřadnice $[X_0,Y_0,Z_0]$ planety vzhledem k Zemi jsou pak:

$$\begin{aligned} X_0 &= X - X_Z\,, \\ Y_0 &= Y - Y_Z\,, \\ Z_0 &= Z - Z_Z\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Převést tyto pravoúhlé souřadnice na ekliptikální délku λ a šířku β je už maličkost. Ze zavedení těchto úhlů (viz. SNP1) plyne:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}}\,, \\ \cos\lambda &= \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\,, \\ \sin\lambda &= \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\,. \end{aligned} \tag{32}$$

V dnešní době se nejčastěji používají rovníkové souřadnice. Příslušné kartézské souřadnice X_0^R, Y_0^R, Z_0^R obdržíme otočením souřadnic X_0, Y_0, Z_0 o úhel $-\varepsilon$ kolem osy X_0. Velikost pootočení je dána úhlem ε, který svírá rovník s ekliptikou, směr pak tím, že Slunce v den jarní rovnodenosti vystupuje nad rovník (tj. severně od rovníku). Kartézské souřadnice X_0^R, Y_0^R, Z_0^R převedeme na rovníkové podobně, jako tomu bylo v případě ekliptikálních souřadnic.

Na konec bych měl ještě dvě poznámky. Celá mašinerie elementů dráhy jde pochopitelně použít na jakékoliv těleso obíhající kolem Slunce (planetky, komety, …). Druhá pak je, že elementy dráhy, díky precesi zemské osy (viz. SNP2) a díky gravitačnímu působení ostatních planet, závisejí na čase. Proto se uvádí epocha (rok), ke které jsou elementy dráhy vztaženy.

Úloha S . III … ***Venuše***

Spočtěte ekliptikální a rovníkové souřadnice Venuše pro 24.8.1988 v 0^hUT (světový čas). Pro tento den určete vzdálenost Venuše od Země a máte–li doma nějakou hvězdnou mapu, určete také souhvězdí, ve kterém se Venuše nachází. Elementy drah Venuše a Země jsou:

$$\begin{aligned} &a_V = 0{,}72333\,\mathrm{AU}, \quad e_V = 0{,}00679, \quad i_V = 3{,}3949°, \quad \Omega_V = 76{,}7112°, \quad \omega_V = 55{,}0804°, \\ &a_Z = 1{,}00000\,\mathrm{AU}, \quad e_Z = 0{,}01673, \quad i_Z = 0{,}0014°, \quad \Omega_Z = 352{,}2647°, \quad \omega_Z = 110{,}6756°. \end{aligned}$$

Oběžná doba Země kolem Slunce je $T_Z = 365{,}2571$ dne. Údaj o okamžiku průchodu planet periheliem je nahrazen zadáním středních anomálií Venuše M_0^V a Země M_0^Z pro 18.7.1988 v 0^hUT:

$$M_0^V = 186{,}0712° \quad M_0^Z = 193{,}2434°\,.$$

Při řešení nepoužívejte žádné vztahy vyčtené z knih o astronomii.

Naše adresa: FKS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha