

10. ročník, úloha IV. 4 ... napjatá situace (4 body; průměr ?; řešilo 71 studentů)

Mějme dvě pružiny o tuhosti k_1 a k_2 . Jaký bude poměr period kmitů, jestliže na ně pověsíme závaží, pokud jsou v prvním případě pružiny spojeny „sériově“ a ve druhém „paralelně“ (viz obr. 1)? V „paralelním“ případě je závaží umístěno tak, že hrazdička je stále vodorovná.

Nejprve připomeňme definiční vztah pro tuhost pružiny

$$k = \frac{F}{\Delta y}$$

a nyní odvodíme vztahy pro tuhost systému pro paralelní a sériové spojení pružin.

Paralelní spojení

Prodloužení obou pružin Δy , bude stejné pro obě pružiny, neboť dle předpokladů úlohy je hrazdička spojující pružiny stále vodorovná, tedy

$$\Delta y = \Delta y_1 = \Delta y_2 .$$

Celková síla, kterou působí obě pružiny na hrazdičku, je

$$F = k_1 \Delta y_1 + k_2 \Delta y_2 = (k_1 + k_2) \Delta y$$

a pro „tuhost pružin spojených paralelně“ tak dostaneme

$$k = \frac{F}{\Delta y} = \frac{(k_1 + k_2) \Delta y}{\Delta y} = k_1 + k_2 .$$

Připomeňme, že v zadání úlohy nebylo řečeno nic o umístění zátěže na hrazdičku a bez znalosti její polohy na hrazdičce nelze činit žádné úvahy o rozkládání tíhové síly na zátěž působící na jednotlivé pružiny.

Sériové spojení

Síla, která způsobuje prodloužení dolní pružiny, se v ideálním případě, přenáší na horní pružinu, proto platí

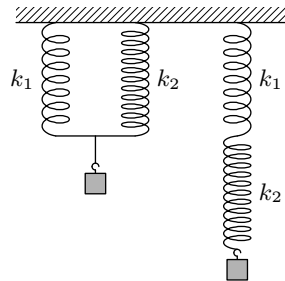
$$F = F_1 = F_2 .$$

Celkové prodloužení soustavy pružin je tedy

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

a pro „tuhost pružin spojených sériově“ pak máme

$$k = \frac{F}{\Delta y} = \frac{F}{F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} .$$



Obr. 1

Uvažujeme-li, že se obě pružinky budou chovat jako jedna, bez vzniku složených kmitů a podobných nepěkných věcí, stačí použít známý vztah pro dobu periody kmitů oscilátoru tvořeného pružinou tuhosti k , na které je zavěšeno závaží o hmotnosti m

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Tedy poměr period kmitů sériově a paralelně spojených pružin bude

$$\frac{T_c}{T_p} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}} \geq 2.$$

Poslední nerovnost platí díky AG nerovnosti (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem).

Daniel Král