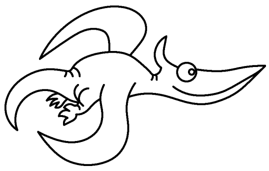


Zadání IV. série

Termín odeslání: 9. března 1998

Úloha IV . 1 ... *soutěž jehlanů*

Vezmeme dva jehlany stejných rozměrů se čtvercovou podstavou o délce podstavné hrany a a výšce v. Kromě toho, že jejich rozměry jsou stejné, i jejich hmotnost je stejná. Jeden má drátěné hrany a druhý má plechové stěny. Postavíme je vedle sebe na podložku, kterou začneme naklánět. Který z modelů se dříve překlopí? Tření je tak velké, že jehlany po podložce nebudou klouzat.

Úloha IV . 2 ... *vodní hodiny*

Vodní hodiny jsou přesýpací hodiny, ve kterých se místo přesypávání písku přelévá voda. Navrhněte jejich tvar tak, aby hladina vody v horní nádobce klesala konstantní rychlostí. Vzduch je z nádobek vyčerpán.

Úloha IV . 3 ... *energeticky úsporný domeček*

Stavební firma Krychle staví domy pouze krychlovitého tvaru. Její nejnovější stavba má hranu dlouhou 100 m. Jak je možné, že oproti jejich první stavbě (s hranou dlouhou 10 m) klesly značně náklady na vytápění jednoho bytu? Kolikrát? Byty se staví stále stejně velké a firma používá stále stejné suroviny.

Úloha IV . 4 ... *vážení na rovníku*

Kdy ukáží pružinové váhy na rovníku větší hmotnost tělesa: v poledne nebo o půlnoci? O kolik procent se budou údaje lišit? Potřebné hodnoty vyhledejte ve fyzikálních tabulkách. Uvažujte pouze soustavu Země – Slunce (Měsíc někam odletěl).

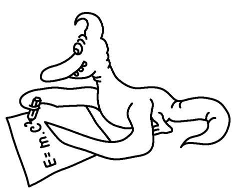
Úloha IV . P ... *levitující kapalina*

Jistě jste si už někdy všimli, že když vytahujeme skleničku z umyvadla dnem vzhůru, zůstává v ní voda až do té chvíle, kdy její okraj vytáhneme nad hladinu. Pak všechna vyteče. Vysvětlete proč. Uvědomte si, že na povrch kapaliny ve skleničce obrácené dnem vzhůru působí tlak vzduchu, který dokáže vytlačit až 10 m vodního sloupce!

Úloha IV . Exp ... *křídový prach*

Změřte poloměr zrnka křídového prachu.

Pomůcka: Pro velmi jemný prach můžeme měřit dobu pádu prachu na zem a za pomoci Stokesova vzorce pro odpor prostředí můžeme poloměr dopočítat.



Řešení I. série

Úloha I . 1 ... *korálky* *(6 bodů, řešilo 43 studentů)*

1. Ponecháme-li soustavu po uvolnění kuliček volně se pohybovat, nebude na kuličky z hlediska vnějšího pozorovatele v inerciální soustavě působit žádná síla, a proto se budou pohybovat rovnoměrně přímočaře až do okamžiku, kdy narazí na zarážku. Protože směr rychlosti bude v tomto okamžiku svírat s tyčí úhel 30 stupňů, a protože ten stejný úhel bude mít rychlost vůči tyči i po odrazu, bude se kulička pohybovat po obvodu rovnostranného trojúhelníka. Závislost $\omega(t)$ lze řešit několika způsoby, např. ze zákona zachování momentu hybnosti, řešením rovnice $\ddot{r} = \omega^2 r$. Zde si ukážeme tento postup: rozložíme rychlost do směru rovnoběžného s tyčí a do směru kolmého na tyč $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\perp + \boldsymbol{v}_\parallel$. Pro velikost $v_\perp$ platí, že $v_\perp = v\cos\varphi$, a zároveň $v_\perp = \omega r$, kde $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ a $x = vt$. Pro $\cos\varphi$ lze ovšem psát $\cos\varphi = a/r$, a tedy výsledně $\omega = va/(\omega^2 + v^2t^2)$. Uvážíme-li nyní, že $v = \omega_0$, obdržíme výsledek $\omega = \omega_0/(1 + \omega_0^2 t^2)$, což je hledaný vztah.

2. Budeme-li udržovat rychlost konstantní, bude $\omega = \omega_0$ a pro trajektorii musíme napsat rovnici $\ddot{r} = \omega^2 r$ jejímž řešením pro podmínky $r(0) = a$ a $\dot{r}(0) = 0$ je funkce $r(t) = a\cosh(\omega_0 t)$ a $\varphi(t) = \omega_0 t$ což jsou parametrické rovnice trajektorie kuliček. Tyto dráhy už netvoří uzavřenou křivku (jako např. trojúhelník). V první části, pokud jste přišli na to, že se kuličky pohybují po přímce, chyby vesměs nebyly, ve druhé části úlohy jste někteří psali, že $r(t) = e^{\omega_0 t}$, což není pravda ($\dot{r}(0) = v_\perp = 0$). Také jste ve většině případů opomíjeli vliv Coriolisovy síly (i když se neprojeví, neboť má směr kolmý k tyči).

Tomáš Drbohlav

Úloha I . 2 ... *odraz kuličky* *(4 body, řešilo 47 studentů)*

Ze zákona zachování energie (například) určíme, že kulička padající z výšky h bude mít těsně před dopadem rychlost $v_0 = \sqrt{2gh}$. Pokud není kulička ideálně pružná, bude mít po odrazu rychlost εv_0, kde koeficient restituce $0 \leq \varepsilon < 1$. Snadno lze experimentálně ověřit, že třeba u „hopíku“ je rozhodně $\varepsilon > 0,5$. Pro řádový odhad tedy stačí uvažovat, že během nárazu se rychlost míčku změní z v_0 na $-v_0$. Průměrné zrychlení při odrazu $\bar{a}$ bude pak rovno

$$\bar{a} = (1 + \varepsilon)v_0/t \approx 2v_0/t\ ,$$

kde t je doba trvání odrazu. Zjištění t je hlavním kamenem úrazu. V zadání úlohy jsme se sice ptali na řádový odhad, i ten je ovšem potřeba na něčem založit. Použitelný model navrhl Karel Kolář ze Sušice.

Předpokládáme, že kulička o původním průměru d se při nárazu deformuje do tvaru rotačního elipsoidu a podložka se nedeformuje (což mnozí správně odůvodnili srovnáním Youngových modulů pružnosti v tlaku u gumy a u oceli). Bude-li v nějakém okamžiku při nárazu výška kuličky (tj. délka její nejkratší osy) rovna y, znamená to, že „všechny rozměry kuličky ve svislém směru budou zmenšeny v poměru y/d“. Tedy pokud kuličku rozřežeme na tenké svislé nudličky, bude délka libovolné nudličky $y_x(y/d)$, kde y_x je délka této nudličky před nárazem. Označme „absolutní stlačení“ kuličky $x = (d - y)/2$. Předpokládáme-li, že materiál kuličky splňuje Hookův zákon[1], bude síla, kterou působí každá taková nudlička proti stlačení, rovna

$$F_S = \sigma_S S = -SE\frac{\Delta y_x}{y_x} = -SE\frac{y_x - y_x(y/d)}{y_x} = -SE\frac{2x}{d},$$

kde E je Youngův modul pružnosti gumy v tlaku a S plocha kolmého řezu ke svislé ose nudličky. Znaménko minus říká, že síla působí proti stlačení. Pokud nepředpokládáme další jevy typu „nudličky po sobě kloužou“, můžeme celkovou sílu, kterou kulička působí na podložku,

[1] To závisí mimo jiné na míře deformace a lze o tom dále diskutovat.

vysčítat přes všechny nudličky. Protože F_S při daném stlačení závisí pouze na ploše řezu S zkoumané nudličky, bude celková síla rovna

$$F = -E\frac{\pi d^2}{4}\frac{2x}{d} = -\frac{\pi d E}{2}x.$$

Veličina x má význam výchylky těžiště kuličky od rovnovážné polohy, kdy se kulička právě dotýká podložky bez deformace. Vidíme, že tato síla je stejná jako u pružiny o tuhosti $k = \pi d^2 E/(2d)$ (tj. $F = -kx$). Je-li na takové pružině umístěno závaží o hmotnosti m, víme, že bude kmitat s frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$ nezávisle na amplitudě kmitů (tedy počáteční rychlosti). V našem případě je m hmotnost kuličky ($m = \varrho\pi d^3/6$ při hustotě kuličky ϱ). Od prvního kontaktu s podložkou do okamžiku odskoku vykoná kulička půl kmitu, což jí bude trvat $t = \pi/\omega$. Celkem tedy dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{2\pi m}{Ed}}, \qquad \bar{a} = \sqrt{\frac{24Egh}{\pi^2\varrho}}\frac{1}{d}.$$

Pokud bereme $E \approx 1,5 \times 10^6$ Pa a $\varrho \approx 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, dostáváme $\bar{a} \approx 2,7 \times 10^4\,\mathrm{ms^{-2}}$ (to je samozřejmě více než jen řádový odhad).

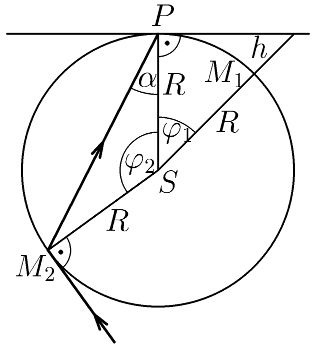
Karel Výborný

Úloha I . 3 ... *ze života hmyzu* *(3 body, řešilo 65 studentů)*

Označme P bod, kde stojí pavouk, M bod, kde sedí moucha, S střed koule. Polohu bodu M budeme charakterizovat úhlem MSP (tím je bod M určen až na otočení kolem osy PS, což zjevně nevadí).

Pavouk může vidět mouchu buď přímým pohledem, nebo skrz kouli. Rozeberme první případ. Protože má pavouk oči u povrchu koule, jeho „obzor“ je určen tečnou rovinou ke kouli v bodě P. Pokud moucha protne tuto rovinu, bude spatřena. Mezní polohu mouchy označme M_1. Vidíme, že pro úhel $\varphi_1 = M_1SP$ platí

$$\cos\varphi_1 = \frac{R}{R+h}.$$



Obr. 1

Bude-li úhel MSP větší než φ_1, moucha nebude vidět přímým pohledem.

Paprsek se na rozhraní vzduch — sklo lomí ke kolmici, tedy úhel, pod kterým dopadá na kouli je větší, než úhel, pod kterým se lomí do koule. Proto pavouk vidí níže, než se dívá, takže existuje oblast, kam skrz kouli nikdy nedohlédne. Nejvýše uvidí, pokud se bude dívat do koule pod úhlem co nejbližším k 90°. Spočteme tedy onu mezní hodnotu, kdy se dívá pod úhlem $\pi/2$. Ze Snellova zákona platí

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\sin\alpha} = \frac{n}{1},$$

kde n je relativní index lomu skla proti vzduchu. (Tento vztah je vlastně zároveň podmínka pro totální odraz.) Bod, kam pavouk dohlédne tímto způsobem, je na obrázku 1 označen M_2. Zbývá dopočítat úhel $M_2SP = \varphi_2$:

$$\varphi_2 = \pi - 2\alpha = \pi - 2\arcsin\frac{1}{n}$$

Bude-li úhel MSP menší, než φ_2, pak žádný paprsek, který od mouchy projde do koule, se nemůže lomit do bodu P (to, že se pavouk dívá do koule pod nějakým úhlem znamená, že k němu přichází paprsek z dotyčného úhlu). Neuvažujeme samozřejmě situaci, kdy paprsek na rozhraní sklo — vzduch se dělí na dvě části, z nichž jedna se lomí ven a druhá se odráží dovnitř. Odraz dovnitř berme zanedbatelný.

Zbývá složit obě zjištěné podmínky. Bude-li úhel MSP zároveň větší než φ_1 a menší než φ_2, pavouk mouchu neuvidí. Množina takových bodů tvoří kulový pás, pokud ovšem není prázdná. Mělo by nás zajímat, zda úloha má vůbec pro mouchu řešení, tj. zda není náhodou $\varphi_1 > \varphi_2$. Index lomu skla není úplně jednoznačný, záleží na druhu skla. Obvyklé hodnoty bývají od 1.5 do 1.8, v každém případě tedy větší, než $\sqrt{2}$. Proto $\alpha < \pi/4$ a tedy $\varphi_2 > \pi/2$. Samozřejmě $\varphi_1 < \pi/2$ pro libovolně velké h, a proto určitě platí $\varphi_1 < \varphi_2$ nezávisle na vstupních podmínkách. Moucha tedy zaručeně má šanci.

Úloha nebyla příliš složitá, přesto hezká řešení byla spíše výjimkou. Vaše argumentace byla často mírně chaotická (kupříkladu je podivné mluvit o paprsku, který vysílá pavoukovo oko). Rád bych také vyvrátil jednu rozšířenou fámu, že v kouli může dojít k úplnému odrazu. Paprsek, který by se měl na rozhraní sklo — vzduch úplně odrážet, se do koule nemůže nikdy dostat, protože úhel, pod kterým přichází na toto rozhraní, je stejný jako úhel, pod kterým se paprsek láme do koule, a ten je menší, než mezní (ze Snellova zákona). Řešením na této fámě založeným jsem ubral bod. Stejně tak jsem strhával bod, pokud vás ani nenapadlo, že by úloha také nemusela mít řešení a hrdě jste hovořili o kulovém pásu.

David Stanovský

Úloha I . 4 ... *kapka deště* *(3 body, řešilo 59 studentů)*

Zadání této úlohy bylo možné chápat (nejméně) dvěma způsoby: 1.varianta: Kapky padají nějakou rychlostí v blízkosti vlaku, občas nějaká z nich dopadne na okno a při dopadu za sebou zanechá stopu. 2.varianta: Jak se kapky dostaly na sklo nás nezajímá, zkoumáme děj, při němž kapky zachycené na skle sjíždějí šikmo dolů.

Řešení 1. varianty:

Na kapku padající z nebes na zem působí tíhová síla $F_g = mg$ (m je hmotnost kapky, g je tíhové zrychlení) a síla odporu prostředí, kterou spočteme z Newtonova vzorce

$$F_o = \frac{1}{2} C S \rho_{\mathrm{vz}} v_{\mathrm{kap}}^2$$

(C je konstanta, S je průřez kapky, ρ_{vz} je hustota vzduchu, v_{kap} je okamžitá rychlost kapky).

Určení tvaru kapky (a tím i jejího S a C) je poměrně obtížné. Pro zjednodušení jej budeme považovat za kulový. Pak bude $S = \pi r^2$, $C = 0,48$ a objem kapky $V = 4/3\pi r^3$. Její hmotnost je pak $m = 4/3\pi r^3 \rho_{\mathrm{kap}}$ (ρ_{kap} je hustota vody).

Kapka je zpočátku svého pohybu urychlována tíhovou silou, zároveň však narůstá odporová síla. Poté, co se tyto dvě síly vyrovnají, padá kapka s konstantní rychlostí, kterou spočteme z rovnosti $F_g = F_o$. Když dosadíme za m a S, dostaneme

$$v_{\mathrm{kap}} = \sqrt{\frac{8 r g \rho_{\mathrm{kap}}}{3 C \rho_{\mathrm{vz}}}}$$

Podle zadání platí pro v_{kap} a v_{vlak} (rychlost vlaku) $\tan\alpha = v_{\mathrm{vlak}}/v_{\mathrm{kap}}$. Z toho dopočítáme

$$v_{\mathrm{vlak}} = \tan\alpha \sqrt{\frac{8 r g \rho_{\mathrm{kap}}}{3 C \rho_{\mathrm{vz}}}}$$

Když dosadíme číselné hodnoty $\alpha = 35^o$, $r = 2,0\,\mathrm{mm}$, $\rho_{\mathrm{kap}} = 1000\,\mathrm{kgm^{-3}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$, $\rho_{\mathrm{vz}} = 1{,}2\,\mathrm{kgm^{-3}}$, $C = 0,48$ dostaneme $v_{\mathrm{vlak}} = 6{,}7\,\mathrm{ms^{-1}} = 24\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Řešení 2.varianty:

Abychom tento problém mohli vyřešit, musíme předpokládat, že povrchové síly jsou dostatečně silné (abychom mohli použít Newtonův vztah) a působí jen kolmo k rovině skla (aby neovlivňovaly trajektorii). Zejména druhý předpoklad splněn nebývá.

Na kapku na skle působí v rovině pohybu síla gravitační $F_g = mg$ a síla odporu prostředí $F_o = 1/2 C S \rho_{\mathrm{vz}} v_{\mathrm{vlak}}^2$. Jejich výslednice udává směr ve kterém se bude kapka pohybovat. Vzhledem k tomu, že kapka na skle má tvar přibližně polokoule bude $S = \pi r^2/2$ a $C = 0,48$. Objem kapky spočítáme jako $V = 2/3\pi r^3$. Pro úhel α platí $\tan\alpha = F_o/F_g$. Dosazením získáme rychlost vlaku

$$v_{\mathrm{vlak}} = \sqrt{\tan\alpha \frac{8 r g \rho_{\mathrm{kap}}}{3 C \rho_{\mathrm{vz}}}}$$

Když dosadíme číselné hodnoty $\alpha = 35^o$, $r = 2{,}0\,\mathrm{mm}$, $\rho_{\mathrm{kap}} = 1000\,\mathrm{kgm^{-3}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$, $\rho_{\mathrm{vz}} = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $C = 0{,}48$ dostaneme $v_{\mathrm{vlak}} = 8{,}0\,\mathrm{ms^{-1}} = 29\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
Na závěr několik poznámek k reálnosti námi spočítaných hodnot:

Proudění vzduchu okolo vlaku bude zcela jistě nelaminární, což jsme neuvážili. Vzhledem k tomu, že neznáme přesný tvar kapky, je použití koeficientu $C = 0{,}48$ diskutabilní (ve skutečnosti bude zřejmě o něco nižší). O tom, že mají kapky tvar více kulový než aerodynamický, se můžeme přesvědčit například v Malém průvodci meteorologií (Mladá fronta Praha 1989). K měření rychlosti vlaku se obě námi popsané metody nehodí také proto, že ve výsledných rovnicích vystupuje poloměr kapky, který by se v terénu měřil obtížně (bývá 1–3 mm). Ve druhé variantě se také projeví nepříznivě vliv povrchových sil.

Jiří Franta

Úloha I . 5 ... *automobily* *(5 bodů, řešilo 53 studentů)*

Úspěšné vyřešení úlohy (za 5 bodů) požadovalo popis děje v obou soustavách a vysvětlení odlišností. Řešení založená na existenci význačné inerciální vztažné soustavy, spotřebě paliva odlišné hmotnosti v obou soustavách apod. jsou z hlediska fyziky zcela nesmyslná, tedy byly hodnoceny 0 body.

Před započetím řešení si musíme uvědomit, že práce je veličina charakterizující míru změny energie, ale není to energie. Zejména tedy neplatí žádný zákon zachování práce a energie. Označme jako *S1* soustavu spojenou s vozovkou a jako *S2* soustavu spojenou s nezrychlujícím automobilem. Vypočteme práci, kterou vykonají síly motoru a síly třecí (pro jednoduchost předpokládejme rovnoměrně zrychlený pohyb). Síla třecí je ta, která uděluje automobilu zrychlení, což snadno ověříme myšlenkovým pokusem: Kdyby byl automobil zavěšen tak, aby se jeho kola nedotýkala vozovky, určitě by se nerozjel. Jaká je tedy práce třecích sil? Ta je určena vzorcem

$$W = Fs$$

kde $F = ma = mv/t$ a s je dráha, po které působí. V soustavě *S1* je $s_1 = 3vt/2$, v soustavě *S2* je $s_2 vt/2$. Každý snadno ověří, že změna kinetické energie je rovna práci, kterou vykonají třecí síly. Zrychlení tedy automobilu uděluje vozovka. Motor otáčí koly automobilu. Podrobnější úvahou lze zjistit, že práce vykonaná silami motoru, tedy i spotřeba paliva, je v obou soustavách stejná a je rovna síle F vynásobené obvodem kol a počtem otáček, které vykonají. Práce vykonaná motorem je rovna

$$W = \frac{mvR}{t}\frac{3vt}{2R} = \frac{3mv^2}{2}$$

Nyní ovšemže musíme najít odpověď na otázku, kam zmizel zbytek energie paliva v soustavě *S2*. Klíč k vyřešení této záhady tkví v pozorování, že soustava *S1* ani *S2* není inerciální, neboť v nich neplatí zákon zachování hybnosti. Tuto drobnou vadu odstraníme tím, že zvolíme (nyní již inerciální) soustavy *S1′* a *S2′*, které se na počátku uvažovaného děje pohybují nulovou rychlostí ($S1'$) nebo rychlostí v ($S2'$) vůči zemi. Jestliže jsme již připustili myšlenku, že se automobil odráží od země, musí se i země odrážet od automobilu a tedy zrychlovat. Označme hmotnost země (ve smyslu podložky) M a vypočítejme celkovou kinetickou energii automobilů a země v obou soustavách na začátku a na konci děje. K určení rychlosti země na konci děje použijeme zákon zachování hybnosti. V soustavě $S1'$ na začátku děje je celková kinetická energie

$$E_{k,1,1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2 \tag{1}$$

Pokud má automobil zrychlit, musí za zákona zachování hybnosti předat stejně velkou, ale opačně orientovanou hybnost zemi. Tedy

$$v_z M = vm$$

a odtud $v_z = \frac{m}{M}v$. V soustavě $S1'$ na konci děje je celková kinetická energie

$$E_{k,1,2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v\right)^2 = \frac{5}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2$$

V soustavě $S2'$ na začátku děje je celková kinetická energie

$$E_{k,2,1} = \frac{1}{2}Mv^2$$

V soustavě $S2'$ na konci děje je celková kinetická energie

$$E_{k,2,2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\left(v + \frac{m}{M}v\right)^2 = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2$$

V obou případech je rozdíl celkové kinetické energie na začátku a na konci děje roven $\frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(m^2/M)v^2$, což je za předpokladu, že m je řádově menší než M, rovno vnitřní energii, kterou ztratilo palivo v motoru automobilu. Tímto je celý „problém“ úspěšně vyjasněn.

Daniel Král'

Úloha I . 6 ... *kadeřnictví v rukou fyzika* *(8 bodů, řešilo 45 studentů)*

Uvedu dvě nejčastější (a zároveň nejsmysluplnější) metody měření.

Nejprve si řekněme, jaký aparát chceme použít, tedy i jaké veličiny chceme měřit. Energie E dodaná fénem je

$$E = Pt$$

kde P je výkon dodávaný vzduchu a t je čas, po který vzduch zahříváme. Měrná tepelná kapacita vzduchu potom ukazuje, kolik energie (tepla) Q je vzduch schopen pojmout:

$$Q = mc(T_k - T_p)$$

kde c je měrná tepelná kapacita vzduchu, m je hmotnost vzduchu, kterou určíme z objemu V a hustoty vzduchu $\varrho = 1{,}2\,\mathrm{kgm^{-3}}$ jako $m = \varrho V$, T_p a T_k jsou počáteční a konečná teplota vzduchu.

Pokud předpokládáme, že energie dodaná fénem ohřívá vzduch, tj.

$$E = Q$$

potom jednoduchými úpravami dostaneme

$$c = \frac{Pt}{(T_k - T_p)\varrho V} \tag{2}$$

Potřebujeme tedy změřit objem vzduchu, který se ohřeje za určitý čas, a počáteční a konečnou teplotu vzduchu.

První metoda:

Nalezneme co nejlépe tepelně izolující nádobu, do které uzavřeme fén s teploměrem. Proces měření je zřejmý. Fén zapneme na určitou dobu, sledujeme, o kolik se ohřál vzduch v nádobě. Objem nádoby změříme.

Zřejmě není příliš vhodné použít místnost, neboť ta není příliš dobře tepelně izolovaná, a než fén ohřeje takové množství vzduchu, tak se vzduch stěnami místnosti stačí ochladit. Navíc my sami ovlivňujeme teplotu vzduchu.

Já jsem použil skříň s rozměry $v \times h \times b$:

$$v = (0,33 \pm 0,01)\,\mathrm{m}\,,$$
$$h = (0,39 \pm 0,01)\,\mathrm{m}\,,$$
$$b = (0,41 \pm 0,01)\,\mathrm{m}\,,$$

a měřil jsem po dobu deseti sekund ($t = (10{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{s}$). (Odhady chyb plynou z toho, že jsem měřil pravítkem a stopoval vteřinovou ručičkou na hodinkách. Jde o chyby střední, tzn. že hodnota naměřené veličiny leží na 99% v intervalu určeném trojnásobkem této střední chyby (tzv. mezní chyba).) Hodnotu měrné tepelné kapacity jsem nejprve spočetl orientačně z prvního pokusu (tabulka 1), přičemž jsem použil hodnotu příkonu udanou výrobcem fénu $P = 1\,200\,\mathrm{W}$ (hodnotu by bylo samozřejmě nejlepší zjistit přímým měřením napětí a proudu v obvodu, já předpokládám střední chybu uvedené hodnoty 5%).

Ze vztahu (2) vyplyne hodnota

$$c \simeq 30\,000\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}K^{-1}}$$

což je o řád a půl větší, než hodnota z tabulek ($c = 1\,003\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}K^{-1}}$).

Podrobnější proměření a výpočty včetně výpočtů chyb tedy zřejmě nemají své opodstatnění. Důležité ovšem je provést ještě alespoň dvě měření, abychom zjistili, zdali to jedno provedené měření nebylo úplně špatně — viz tabulka 1:

Tabulka 1.

č. m.	T_p [°C]	T_k [°C]	t [s]
1	21,5	28,0	10,0
2	24,0	30,0	10,0
3	23,5	30,0	10,0

Měření rozdílu teplot ovšem provádíme v určité výšce nad dnem nádoby. Samozřejmě, čím výše, tím teplejší vzduch. Ve skříni vzniká tedy gradient teploty, jehož proměřováním se celý pokus komplikuje. Můžeme použít nádobu malé výšky, ale jednodušší a lepší je měřit druhou metodou.

Druhá metoda:

Měříme přímo u výstupu fénu, na jakou teplotu se nám vzduch fénem ohřeje. Potom je ovšem třeba určit ještě objemový průtok V/t vzduchu fénem.

Nejlepší by samozřejmě bylo určit rychlost vycházejícího vzduchu, např. lopatkovým kolem. To se ale nutně nemusí točit takovou rychlostí, jakou vychází vzduch z fénu, neboť pohyb vzniká odporem vzduchu. Rychlost otáčení zřejmě ovlivňuje také turbulentní proudění okolo lopatek. Navíc není jednoduché ani určení frekvence otáčení kola.

Nejjednodušší a nejdostupnější je přivázat na hrdlo fénu igelitový sáček, sledovat, za jak dlouho se naplní, a potom změřit jeho objem.

Moje měření touto cestou jsou uvedena v tabulce 2:

Tabulka 2.

č. m.	1	2	3	4	5	průměr	$\triangle' t$
t [s]	0,660	0,640	0,710	0,600	0,710	0,664	0,042

Měření jsem prováděl pomocí malého programu, který určoval časový rozdíl mezi dvěma stisky klávesy, které jsem stiskl současně se zapnutím a vypnutím fénu. Je to metoda velmi nepřesná, proto jsem provedl jen pět měření (mělo by jich být alespoň osm), přičemž ke směrodatné odchylce $\triangle' t$ vzešlé ze statistického zpracování připočítávám ještě odhad chyby $\triangle'' t = 0{,}050\,\mathrm{s}$ takto:

$$\triangle t = \sqrt{\triangle' t + \triangle'' t} = 0{,}065\,\mathrm{s}$$

(Statistické zpracování spočívá ve výpočtu průměru hodnot, hodnoty by měly ležet v intervalu určeném trojnásobkem směrodatné odchylky $\sigma = \sqrt{(n \sum x^2 - (\sum x)^2)/n}$ (tzv. 3-σ kritérium). Směrodatná odchylka je zároveň chyba průměrné hodnoty.)

Objem igelitového sáčku jsem změřil tak, že jsem do něj napustil vodu, když jsem ho předtím vložil do kýblu. Není to příliš přesné měření: $V = (0{,}0070 \pm 0{,}0005)\,\mathrm{m}^3$.

Teplotní měření jsem provedl v místnosti se vzduchem o teplotě $T_p = (26{,}5 \pm 0{,}2)\,°\mathrm{C}$ tak, že jsem teploměr umístil co nejblíže ústí fénu. Naměřil jsem $T_k = (110{,}0 \pm 10{,}0)\,°\mathrm{C}$, přičemž teplota velmi kolísala. Jelikož absolutní chyby hodnot se při součtu či rozdílu hodnot sčítají je $T_k - T_p = (80 \pm 10)\,°\mathrm{C}$.

Jelikož pro chyby součinu nebo podílu hodnot se sčítají relativní chyby, je relativní chyba

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{\triangle P}{P} + \frac{\triangle t}{t} + \frac{\triangle (T_k - T_p)}{T_k - T_p} + \frac{\triangle V}{V} = 0{,}05 + 0{,}098573 + 0{,}125749 + 0{,}071429 = 0{,}345751$$

je výsledná hodnota $c = (1{,}1 \pm 0{,}4)\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} K^{-1}}$ (hodnotu uvádíme tak, aby chyba byla na jednu platnou cifru, poslední platná cifra hodnoty je řádu platné cifry chyby).

Hodnota je přijatelná vzhledem k hodnotě v tabulkách. Můžeme diskutovat příkon fénu. Rozhodně se u druhé metody nespotřebuje celý příkon, dodávaný do fénu. To ale neznamená, že získaná hodnota je kvůli tomu větší. To při dané chybě měření nemůžeme rozhodnout.

Michal Hvězda

Úloha S . I ... ***relace neurčitosti*** *(6 bodů, řešilo 29 studentů)*

a) Neurčitosti polohy rovné poloměru jádra helia r odpovídá minimální neurčitost hybnosti:

$$\Delta p_{min} = \frac{\hbar}{2r}.$$

Protože má být elektron v jádře vázán, můžeme očekávat, že typická hodnota velikosti hybnosti elektronu bude s Δp_{min} řádově srovnatelná:

$$p \approx \Delta p_{\mathrm{min}}.$$

Použijeme-li nyní relativistický vzorec pro kinetickou energii, dostaneme výsledek

$$E_{kin} = \sqrt{\frac{\hbar^2 c^2}{4r^2} + m_0^2 c^4} - m_0 c^2.$$

Po dosazení číselných hodnot $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $d \approx 1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$, vychází kinetická energie elektronu minimálně řádově $1{,}0 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}$ neboli $62\,\mathrm{MeV}$, což je mnohonásobně více než jeho klidová energie. Tak rychlý elektron by slabá ani elektromagnetická interakce nebyly schopny udržet, a protože elektron silně neinteraguje, vyletěl by z jádra. (Obhájit korektnost všech těchto úvah by ale nebylo jednoduché, protože tak silně relativistický systém nemůže ve skutečnosti kvantová mechanika popsat a bylo by třeba užít kvantovou teorii pole, která uvažuje i procesy vzniku a zániku částic.) Hypotéza ale vznikla v době, kdy ještě nebyl znám charakter jaderných sil, a byla vyvrácena zcela jiným argumentem. Experimentálně se zjistilo, že jádro dusíku ${}^{14}_{7}N$, má celočíselný spin, což by nebylo možné, kdyby se skládalo ze čtrnácti protonů a sedmi elektronů, které mají všechny spin 1/2.

b) Použijeme-li elementární vztah pro úhlovou vzdálenost sousedních interferenčních minim $\Delta\alpha$, známý z vlnové optiky:

$$b\Delta\alpha = \lambda, \Delta\alpha = \frac{d}{l},$$

který platí pro $d \ll l$, není obtížné s pomocí de Broglieho hypotézy dospět k výrazu pro rychlost elektronů

$$v = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} = \frac{hl}{mbd}.$$

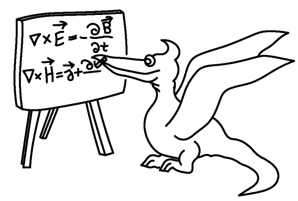
Číselně vychází $v = 12\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

c) Vysvětlení difrakce světla pomocí relací neurčitosti je jednoduché. Předpokládejme, že přepážka leží v rovině x-y a že štěrbina je orientována ve souhlasně s osou y, takže má ve směru osy x průměr d. Ve směru osy z vyšleme k přepážce foton s hybností p. Když foton přepážkou prochází, je lokalizován v oblasti štěrbiny ($\Delta x \approx d$) a získá tím neurčitost hybnosti řádově $\Delta p_x \approx h/d$. Bude-li jeho původní hybnost dostatečně velká, odkloní se typicky o úhel:

$$\alpha = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{h}{pd} = \frac{\lambda}{d},$$

což je ve úplném souhlasu s předpovědí vlnové optiky. Je to ale trochu náhoda, protože kdybychom použili jiný řádový odhad, např. $\Delta p_x \approx \hbar/d$, dostali bychom na pravé straně u vlnové délky navíc určitý konstantní faktor, ve zmíněném případě $1/2\pi$. To ale nic nemění na správnosti řádového odhadu úhlu α.

Michal Fabinger



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Schrödingerova rovnice

Nebylo by asi nejlepší zabývat se o kvantovou mechanikou, aniž bychom napsali Schrödingerovu rovnici, která má stejně fundamentální význam, jako Newtonova pohybová rovnice v mechanice klasické. Dnešní díl seriálu bude proto matematicky trochu náročnější, než bývá obvyklé, budeme používat derivace poněkud častěji. Možná Vás ale uklidní, že ve zbývajících, matematicky jednodušších dílech seriálu tomu tak nebude a že k jejich pochopení Schrödingerovu rovnici znát nemusíte.

Časově závislá vlnová funkce. Jak jsme viděli v minulé kapitole, přisuzuje se v kvantové mechanice každému stavu částice nenulová vlnová funkce $\psi(x,y,z)$, pro kterou musí být integrál z druhé mocniny její absolutní hodnoty přes celý prostor konečný, aby se dala normalizovat. Protože se stav fyzikálních systémů obecně s časem mění, bude na čase záviset i vlnová funkce. V případě, že bereme v úvahu časovou závislost vlnové funkce, označujeme ji většinou velkým písmenem $\Psi(x,y,z,t)$.

Vlnová funkce volné částice. Podívejme se, pro jednoduchost nejprve v jednorozměrném případě, jak by měla vypadat vlnová funkce částice, která má přesně zadanou hybnost a na kterou nepůsobí žádné síly. V analogii s optikou očekáváme, že taková částice bude popsána harmonickou vlnou, protože pouze ta má přesně definovanou vlnovou délku, a tedy i hybnost. Je rozumné předpokládat, že vlnovou funkcí částice, která se šíří ve směru osy x je:

$$\Psi(x,t) = \sin(kx - \omega t) + i\cos(kx - \omega t),$$

neboli

$$\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{(ikx - i\omega t)}.$$

Pro vlnočet k a úhlovou frekvenci ω platí následující vztahy:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{E}{\hbar},$$

kde λ je vlnová délka, p hybnost, T perioda a E energie částice. První je obsahem de Broglieho hypotézy, druhý obsahem Einsteinova vyjádření energie fotonu. Ve výrazu pro Ψ by u sinu a kosinu mohly být obecně libovolné komplexní konstanty c_1 a c_2, pokud by nebyly obě zároveň nulové. My ale chceme, aby byla pravděpodobnost výskytu částice ve všech bodech prostoru stejná. Zvolíme-li $c_1 = 1$ a $c_2 = i$, bude skutečně $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$ rovno konstantě, v našem případě jedničce. Z toho také plyne, že částice má nekonečnou neurčitost polohy, jak to vyžadují relace neurčitosti.

Je dobré si také uvědomit, že fázová rychlost vlnění

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m}$$

není rovna rychlosti částice. Té ve skutečnosti odpovídá takzvaná grupová rychlost

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = \frac{p}{m},$$

se kterou se pohybují vlnová klubka příslušející částici s trochu rozmazanou hybností.

Mírnou nevýhodou je, že žádnou vlnovou funkci volné částice nemůžeme normalizovat, protože integrál z konstanty přes celý prostor diverguje. Jedná se ale o potíž spíše technického rázu, která nám v tomto okamžiku nemusí vadit.

Schrödingerova rovnice. Nyní by nás zajímalo, zda vlnová funkce volné částice nemá určité vlastnosti, které by se pak daly zobecnit na všechny částice. Zderivujeme-li funkci dvakrát podle x nebo jednou podle t, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= -\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -\frac{iE}{\hbar}\Psi. \end{aligned}$$

Vztahy můžeme ještě přepsat s pomocí celkové energie $E = p^2/2m$ jako:

$$\begin{aligned} E\Psi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \\ E\Psi &= i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Není-li však částice volná a pohybuje-li se pod vlivem silového pole s potenciálem $V(x,y,z,t)$, bude se její celková energie skládat z kinetické a potenciální ($E = V + p^2/2m$). Jestliže chceme tyto rovnice zobecnit i na takovou částici, bude zřejmě potřeba předposlední rovnici mírně modifikovat:

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi, \tag{3}$$

$$E\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{4}$$

Dostali jsme rovnice, které platí pouze pro vlnové funkce částice s přesně určenou energií, pro jiné vlnové funkce by jejich levé strany neměly žádný smysl. Pokud z nich ale vyloučíme výraz $E\Psi$, získáme slavnou Schrödingerovu rovnici, která určuje časový vývoj libovolné vlnové funkce uvažované částice:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Rovnici jsme však neodvodili, pouze jsme naznačili, jaká motivace může k Schrödingerově rovnici vést. Ukazuje se ale, že experimentální výsledky jsou s ní v dobrém souladu, takže ji můžeme považovat za správný fyzikální zákon.

Zobecnění na třírozměrný případ. Vlnová funkce volné částice s hybností (p_x, p_y, p_z) má tvar

$$\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z - Et)} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et)}$$

Zcela stejným postupem jako v předchozím odstavci můžeme intuitivně odvodit Schrödingerovu rovnici pro částici v třírozměrném prostoru:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Stacionární stavy. Stacionárními stavy se nazývají takové stavy kvantově mechanického systému, které mají přesně určenou časově konstantní energii, a pro které tedy platí rovnice (3) a (4). Existují jedině v případě, že vnější silová pole působící na systém se nemění a potenciální energie V nezávisí čase. Pokud chceme zmíněnou dvojici rovnic zjednodušit, můžeme předpokládat řešení ve tvaru:

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\phi(t).$$

Dosadíme-li za Ψ do (3), resp. (4) a vydělíme-li získanou rovnici ϕ, resp. ψ, dostaneme

$$\begin{aligned} E\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi, \\ E\phi &= i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}. \end{aligned}$$

První rovnice udávající prostorovou závislost vlnové funkce $\psi(x,y,z)$ se nazývá bezčasová Schrödingerova rovnice. Její řešení závisí na tvaru potenciálu $V(x,y,z)$, na rozdíl od rovnice pro časovou závislost $\phi(t)$, jejíž řešení můžeme napsat ihned:

$$\phi(t) = c\mathrm{e}^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

Zvolíme-li konstantu c rovnou jedné, dospějeme k závěru, že libovolný stacionární stav má vlnovou funkci ve tvaru:

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\mathrm{e}^{-\frac{iEt}{\hbar}},$$

kde $\psi(x,y,z)$ splňuje bezčasovou Schrödingerovu rovnici s příslušnou hodnotou energie. Jak je vidět, vlnová funkce částice závisí na čase, ale pouze triviálně. Vlnovou funkci v čase $t = T$ dostaneme z funkce v čase $t = 0$ pouze vynásobením konstantou $\exp(-\frac{iET}{\hbar})$, takže můžeme říct, že částice zůstává stále ve stejném stavu. Hustota pravděpodobnosti výskytu částice pro stav Ψ vychází:

$$\Psi^*\Psi = \psi^*\mathrm{e}^{+\frac{iEt}{\hbar}}\psi\mathrm{e}^{-\frac{iEt}{\hbar}} = \psi^*\psi,$$

a nemění s časem.

V případě vázaných stavů částice (tj. stavů se zápornou energií vůči nekonečnu) existuje normalizovatelné řešení bezčasové rovnice pouze pro některé diskrétní hodnoty E. Pokud má tedy částice přejít z jednoho stacionárního stavu do druhého s jinou hodnotou energie, musí tak učinit najednou vysláním nebo pohlcením určitého množství (kvanta) energie. Právě tato vlastnost dala celé teorii název kvantová mechanika.

Úloha IV . S ... *časový vývoj*

a) Mějme dvě časově závislé vlnové funkce $\Psi_1(x,y,z,t)$ a $\Psi_2(x,y,z,t)$, které odpovídají stacionárním stavům s různými energiemi E_1 a E_2. Pokud budete chtít, můžete si dosazením do časové Schrödingerovy rovnice ověřit, že i jejich superpozice

$$\Psi(x,y,z,t) = a\Psi_1(x,y,z,t) + b\Psi_2(x,y,z,t), \quad a,b \in \mathbb{C}, \quad |a| + |b| \neq 0,$$

odpovídá časovému vývoji přípustné vlnové funkce. Vaším úkolem je ale něco jiného. Máte zjistit, za jakou dobu T bude částice, která byla v čase $t = 0$ popsána funkcí $\Psi(x,y,z,0)$, opět ve stejném stavu. Jinak řečeno, najděte nejmenší možné $T > 0$, pro které je

$$\Psi(x,y,z,T) = c\Psi(x,y,z,0),$$

kde c je libovolné nenulové komplexní číslo.

b) Vypočtěte vlnovou délku fotonu o frekvenci, s jakou se mění stav (nikoli vlnová funkce!) elektronu v atomu vodíku, když je v superpozici jednoho stacionárního stavu na druhé a jednoho na třetí energetické hladině.

Literatura

Arthur Beiser: Úvod do moderní fyziky, *Academia, Praha 1978.*

Naše adresa: *FYKOS, KTF MFF UK*
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha
e-mail: *fykos@mff.cuni.cz*