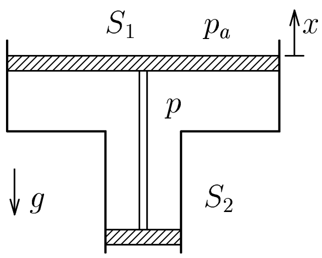
Zadání V. série

Termín odeslání: 27. dubna 1998

Úloha V . 1 ... *dvojpíst*

Na obrázku 1 vidíte dva spojené písty o ploše S_1 a S_2 a celkové hmotnosti m zasunuté do pouzdra, které je na obou stranách otevřené. Celé zařízení je v rovnováze a je umístěno v tíhovém poli g. Vně pístů je atmosférický tlak p_a, uvnitř je 1 kmol ideálního plynu o tlaku p. O kolik stupňů Celsia musíme plyn mezi písty ohřát, aby se písty posunuly o x směrem vzhůru?



Obr. 1

Úloha V . 2 ... *hradní studna*

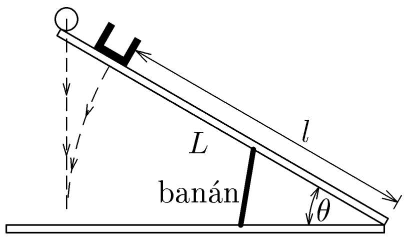
Řešitel Fykosu měřil hloubku hradní studny. Vzal si na pomoc stopky a kámen. Kámen vhodil do studny a současně spustil stopky. Zastavil je poté, co uslyšel náraz kamenu na dno. Stopky ukázaly údaj 4,77 s. Jelikož si náš přítel pamatoval velikost tíhového zrychlení a rychlost zvuku, ihned na místě spočítal hloubku (vyschlé) studny. Dokážete to také? Určete zároveň chybu popsaného měření.

Úloha V . 3 ... *kapacitní krychle*

Spočítejte kapacitu krychle, jejíž hrany jsou tvořeny kondenzátory o kapacitě C. Uvažujte všechna tři možná zapojení krychle do obvodu.

Úloha V . 4 ... *cvičená opice*

Novopečený majitel zoologické zahrady by měl rád v pavilonu opic následující atrakci (viz obr. 2). Na jednom ze dvou prkýnek spojených pantem je ve vzdálenosti l od pantu připevněn miniaturní košíček a na konci prkýnka (ve vzdálenosti L od pantu) je položen míček. Prkýnko je podepřeno banánem, a svírá se zemí úhel θ . K této „aparatuře“ přijde hloupá opice (zatím nebyl čas ji vycvičit), a vezme si banán.



Obr. 2

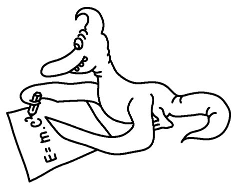
Vyvrcholením atrakce by mělo být to, že odbrzděné prkénko se dá do pohybu a míček by měl sám spadnout do košíčku. Diskutujte, zda-li je to vůbec možné a pokud ano, spočtěte jaké musí být l v závislosti na L a úhlu θ.

Úloha V . P ... *samopal*

Rozhodněte jak těžkou krychli lze převrátit střelbou ze samopalu (či spíše menšího děla) o parametrech 50 střel za sekundu, rychlost střely $500\,\mathrm{ms}^{-1}$, hmotnost střely 100 g. Krychle má hranu dlouhou 1 m, po podložce neklouže.

Úloha V . Exp ... *pevnost nitě*

Změřte mez pevnosti nitě v tahu. S řešením nám pošlete 1 m dlouhý vzorek vaší nitě.



Řešení III. série

Úloha III . 1 ... *jeřáb* *(6 bodů, řešilo 56 studentů)*

Úloha je zákeřná v tom, že na ni nelze použít druhý Newtonův zákon ve formulaci $F = ma$, platné pouze v případě, že hmotnost tělesa je konstantní. Je třeba vyjít ze vztahu

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

tj. síla je rovná změně hybnosti za jednotku času. Další nemilé překvapení je, že zákon zachování mechanické energie je přímým důsledkem vztahu $F = ma$.

Poznámka: Kdekoliv v dalším textu narazíte na symbol $\mathrm{d}x$ a nebudete mu rozumět, představte si místo něj Δx. Podobně z $\int$ učiňte $\sum$.

Pokud se těleso neměnné hmotnosti pohybuje za působení konzervativního[1] silového pole (gravitační síly a síly jeřábu), uvolněná potenciální energie (do níž je zahrnuta i síla jeřábu) se zcela přemění na energii kinetickou. Pokud ovšem během pohybu hmotnost tělesa vzroste o Δm, musí se z potenciální energie uhradit i urychlení přírůstku Δm na rychlost celého tělesa. Část energie se tedy zdánlivě „ztrácí“. Pomocí úvah v tomto směru dospěl *Milan Kocián* k dílčím výsledkům, a to bez použití derivací.

Předvedeme nyní řešení úlohy přímo z pohybových rovnic. Označíme z výšku konce lana a λ délkovou hustotu lana. Z druhého Newtonova zákona dostaneme

$$F - \lambda z g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right), \tag{2}$$

neboť $\lambda z = m$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = v$ a $p = mv$. Dosazením (1) do (2) dostaneme

$$F - \lambda z g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3}$$

Vynásobením $z\,\mathrm{d}z$ obdržíme

$$F z\,\mathrm{d}z - \lambda g z^2\,\mathrm{d}z = z\,\mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \tag{4}$$

Zintegrujeme-li (4) podle t, získáme

$$\int \left(F z - \lambda g z^2\right)\mathrm{d}z = \lambda \int z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\left(z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \tag{5}$$

Provedeme-li substituci $z\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = q$, dostane pravá strana (5) tvar $\lambda \int q\,\mathrm{d}q$, což po integraci dá $\frac{1}{2}\lambda q^2 + \mathrm{const.}$ Po dosazení za q a zintegrování levé strany obdržíme

$$\frac{1}{2}\frac{F}{\lambda} z^2 - \frac{1}{3} g z^3 = \frac{1}{2}\left(z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + C, \tag{6}$$

[1] Konzervativní je pole, ve kterém lze definovat potenciální energii. Problémy nastávají například s magnetickým polem nebo při započítání tření.

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek úlohy. Pro speciální případ $z = 0$ se rovnice (6) zjednoduší na $C = 0$, rovnice však musí platit pro libovolné z, tedy musí být $C = 0$.

Vykrátíme-li z^2, dostaneme

$$\frac{1}{2}\frac{F}{\lambda} - \frac{1}{3}gz = \frac{1}{2}v^2 \tag{7}$$

Po úpravě

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gz}{3}} \tag{8}$$

Nyní pro zajímavost uveďme, jak by se získala závislost z na t:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{F/\lambda - 2gz/3}} = \mathrm{d}t \tag{9}$$

Zintegrováním obou stran rovnice

$$\begin{aligned} -\frac{3}{g}\sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gz}{3}} &= t - t_0 \\ z &= z(t) = \frac{3F}{2\lambda g} - \frac{g}{6}(t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Nyní máme tedy vyjádřenu rychlost na poloze a dokonce i polohu na čase (t_0 čas, kdy konec lana dosáhne maximální výšky). Pro odpověď na zadané otázky stačí jen první závislost:

Z rovnice (7) je zřejmé, že maximální rychlosti dosáhne konec lana zřejmě při $z = 0$, pak bude $v_{\max} = \sqrt{F/\lambda}$ a maximální výšky dosáhneme pro $v = 0$, což nastane při $z = 3F/(2\lambda g)$. To je vidět i ze závislosti $z(t)$: shledáváme, že konec lana se pohybuje *rovnoměrně zpomaleně* se zrychlením $a = g/3$ (srovnej s $s = gt^2/2$).

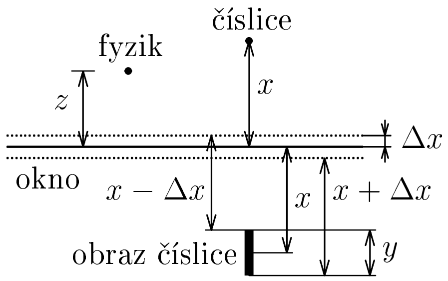
Ze závislosti $z(t)$ vyplývá, že po určitém čase zase lano (přes veškerou snahu jeřábu) zase spadne na zem[2]! Kupodivu to není chyba; pokud bychom do úlohy (tj. do pohybové rovnice) zavedli tlumení (například brzdnou sílu úměrnou rychlosti), z (neharmonického) periodického kmitání by se staly tlumené kmity blížící se k rovnovážné poloze $z = F/(\lambda g)$. Řešení takové rovnice už je ovšem nanejvýš vhodné ponechat počítači.

Tato zdánlivě jednoduchá úloha nechť všem slouží jako varování před slepým používáním notoricky protřelých vzorečků. Nikdy nezapomínejte na fyziku, která za každým takovým vzorečkem stojí, a zamyslete se nad předpoklady, za nichž lze ten který exemplář použít. Zároveň, pokud žádný z nich nepomáhá, neklesejte na mysli a zkuste raději použít selský rozum, i za to se dávají body.

Karel Výborný & Martin Krsek

Úloha III . 2 ... *autobus* *(4 body, řešilo 51 studentů)*

Okno autobusu lze považovat za rovinné zrcadlo. Rovinné zrcadlo vytváří obraz předmětu v určité vzdálenosti před zrcadlem, ve stejné vzdálenosti za zrcadlem. Označme x vzdálenost číslice od středu rovnovážné polohy okna, Δx amplitudu jeho kmitů. Nechť dále náš fyzikální přítel je ve vzdálenosti z od rovnovážné polohy okna. Potom obraz číslice, viz obrázek 1, bude v krajních polohách ve vzdálenostech $z - 2\Delta x + x$ a $z + 2\Delta x + x$ od fyzika. Je-li tloušťka čáry y, potom $\Delta x = y/4 = 0{,}25\,\mathrm{cm}$.



[2] A celý děj se může opakovat.

Mnohem obtížnější je určení minimální frekvence kmitů okna. Lidské oko je schopno rozlišit dva světelné signály vzdálené od sebe alespoň 100 ms. Takový signál však na něj působí dojmem blikání a je mu i trochu nepříjemný. Světelné signály s frekvencí 20 Hz (perioda 50 ms) a výše budí dojem stálého zdroje světla. Je-li T perioda kmitů okna, potom *průměrná* doba mezi dvěma průchody obrazu číslic toutéž polohou, je $T/2$. Je potřeba si však uvědomit, že mezi jednotlivými průchody mohou být i řádově různé časové intervaly. Lze očekávat, že *průměrná* doba mezi dvěma průchody obrazu číslic toutéž polohou bude menší než 50 ms, ale ne příliš. Odtud lze odhadnout mezní frekvenci kmitů okna na asi 15 Hz. Je však potřeba dodat, že tato hodnota bude u každého člověka jiná.

Daniel Král

Úloha III . 3 ... *káva a mléko* *(5 bodů, řešilo 48 studentů)*

Jak si co nejrychleji ochladit kávu nebo čaj mlékem, to je otázka, která trápí mnohé z vás i z nás. Je lepší nalít nejprve mléko a potom nechat chladit, nebo nechat kávu stydnout a mléko nalít těsně před konzumací?

Jak již bylo naznačeno v zadání, pokud v místnosti udržíme konstantní teplotu, pak se teplota kávy bude exponenciálně přibližovat k teplotě místnosti. Odvození není složité. Za krátký čas čas Δt káva odevzdá okolí teplo

$$\Delta Q = -k\ S_k (T - T_0)\Delta t\,,$$

kde T_0 jsme označili teplotu okolí, T je okamžitá teplota kávy, S je plocha, kterou se káva dotýká okolí a k je konstanta, která charakterizuje střední rychlost přestupu tepla z kávy do okolí. Změnu teploty kávy pak popisuje rovnice

$$\Delta Q = C_k \Delta T\,,$$

kde C_k je tepelná kapacita kávy. Spojíme-li obě rovnice dohromady, dostaneme

$$\frac{\Delta T}{T - T_0} = -\frac{k S_k}{c_k}\Delta t\,.$$

Z této rovnice dostaneme průběh teploty v čase – buď integrováním, nebo intuitivně (víme, že to bude nějaká exponenciální závislost). Označme $\alpha_k = kS_k/C_k$ a pak nejsložitější exponenciální závislost může mít tvar

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\mathrm{e}^{-\alpha_k t}\,. \tag{10}$$

Po dostatečně dlouhé době zbyde z exponenciály nula ($\mathrm{e}^{-\infty} \to 0$) a proto musí být první člen v součtu T_0 – pokojová teplota. Na začátku je exponenciála rovna jedné ($\mathrm{e}^0 = 1$) a teplota tedy musí být rovna teplotě T_1. Proto dostaneme jako faktor před exponenciálou výraz $T_1 - T_0$.

Teď víme, jak káva chladne, když ji necháme stát. Co se stane, jestliže do ní nalijeme mléko? Pro tuto situaci můžeme napsat kalorimetrickou rovnici

$$C_k(T_k - T_{k+m}) = C_m(T_{k+m} - T_0)\,,$$

kde T_k je teplota kávy před smícháním, T_{k+m} teplota směsi po smíchání. Malou ekvilibristikou se vzorci dostaneme

$$T_{k+m} = T_0 + \frac{C_k}{C_k + C_m}(T_k - T_0)\,. \tag{11}$$

Nyní můžeme spočítat výslednou teplotu v případě, že mléko nalejeme do kávy v libovolném čase t. Nejprve káva stydne podle vztahu (10), získanou teplotu dosadíme do vztahu (11) za T_k a máme teplotu, kterou bude mít směs káva-mléko po smíchání:

$$T_{k+m} = T_0 + (T_{\text{poč}} - T_0)\frac{C_k}{C_k + C_m}\mathrm{e}^{-\alpha_k t}\,.$$

V tuto chvíli nám ale ještě zbývá $2\,\mathrm{min} - t$ času do odchodu z domova. Pitivo nám bude stydnout podle vztahu podobného (10), kde za čas stydnutí dosadíme zbývající čas, tedy $2\,\mathrm{min} - t$. Ale to není vše, ještě musíme konstantu α_k vyměnit za konstantu α_{k+m}. Proč? Protože se změnila celková tepelné kapacita ochlazované kapaliny a také plocha kontaktu s okolím se zvětšila (každá samozřejmě jinak). Faktor v exponenciále můžeme napsat jako

$$\alpha_{k+m} = \frac{kS_{k+m}}{C_k + C_m}\,.$$

Dáme-li vše dohromady, dostaneme, že teplota kávy a mléka po dvou minutách chladnutí bude

$$T_{\text{konc}} = T_0 + (T_{\text{poč}} - T_0)\frac{C_k}{C_k + C_m}\mathrm{e}^{-\alpha_k t}\mathrm{e}^{-\alpha_{k+m}(2-t)}\,,$$

v závislosti na čase t, kdy jsme přilili mléko. Pokud budou oba koeficienty α_k a α_{k+m} shodné, můžeme argumenty v exponenciálách sečíst a dostaneme jedinou exponenciálu $\mathrm{e}^{-\alpha\cdot 2''}$ a tudíž výsledná teplota nebude záviset na okamžiku, kdy jsme mléko do kávy nalili.

Ale koeficienty nejsou stejné a proto bude záviset na čase nalití mléka. Exponenciálu ještě jednoduše upravíme na

$$\mathrm{e}^{-2\alpha}\mathrm{e}^{-(\alpha_k - \alpha_{k+m})t}\,.$$

Závisí na rozdílu $\alpha_k - \alpha_{k+m}$, jestli to je klesající, nebo rostoucí funkce. To se dozvíme, zamyslíme-li se nad tím, jak se α_k liší od α_{k+m}. Záměrně jsem do definičního vztahu pro α_{k+m} nenapsal nový povrch jako součet, protože povrch se změní jen málo, kdežto tepelná kapacita vzroste pozorovatelně. To znamená, že $\alpha_{k+m} < \alpha_k$ a tudíž je výhodnější nalít mléko co nejpozději.

Na závěr ještě jednu poznámku: V praxi je proces chladnutí silně ovlivněn tím, jak vše zamícháme. A vzhledem k tomu, že se konstanty α_k a α_{k+m} od sebe liší jen velmi málo, převládnou spíše tyto jevy.

Jedním z nejúčinnějších procesů, při kterém něco chladne je vypařování. A rychlost vypařování je silně závislá na tlaku par vypařované kapaliny nad hladinou. Pokud tento tlak účinně snižujeme, např. odváděním par od hladiny (třebas foukáním), kapalina se odpařuje intenzivněji a protože výparné teplo se kapalině musí odebrat, tak se i ochlazuje.

Jan Hradil

Úloha III . 4 ... *válec versus kvádr* *(6 bodů, řešilo 41 studentů)*

Silový pohled: Silové řešení této úlohy je zřejmé a jak se dalo předpokládat, nečinilo větší problémy.

Kvádr i válec po dopadu na stůl se začnou o stůl třít. Třecí síla, jak bylo uvedeno v zadání, je závislá pouze na hmotnosti předmětů (je rovna mgf) a je tedy pro oba předměty stejná. Je to také jedinná síla (tíha je plně kompenzována normálovou reakcí stolu), která na předměty působí, a tak obě tělesa budou zpomalovat se stejným zrychlením $-gf$. (Pokud se vám to zdá zvláštní, uvědomte si, že platí 1. impulzová věta pro pevné těleso, která říká, že těžiště tělesa se bude pohybovat, jako bychom v něm soustředili celkovou hmotnost tělesa a nechali v něm působit všechny síly na těleso působící, bez ohledu na to, kde tyto síly vlastně na těleso původně působí, matematicky

$$\vec{a}_T = \frac{1}{M}\sum_i \vec{F}_i\,, \tag{12}$$

M je hmotnost tělesa, $\vec{F}_i$ jednotlivé působící síly). To bude pravda nejméně po dobu, po kterou se oba předměty třou o stůl.

Kvádr se bude pohybovat rovnoměrně zpomaleně s okamžitou rychlostí $v = v_0 - gft$, kde t je čas počítaný od dopadu předmětů na stůl, v_0 počáteční rychlost, a nakonec se zastaví — v čase $T_z = v_0/gf$. Kvádr se zřejmě tře o stůl po celou dobu svého pohybu — jinak se totiž, na rozdíl od válce, pohybovat nemůže.

Válec po dopadu také začne třít o stůl. Na rozdíl od kvádru se však začne roztáčet a po jisté době T_k se už bude točit tak rychle, že třecí síla zanikne — v tom okamžiku bude $\omega r = v$, kde ω je jeho úhlová rychlost a v je translační rychlost jeho pohybu. Od tohoto okamžiku válec neprokluzuje, a protože na něj už žádná síla nepůsobí, bude se dále pohybovat konstantní rychlostí.

Shrneme-li dosavadní myšlenky, vidíme, že do času T_k se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí, po T_k si válec zachovává konstantní rychlost, kvádr dále zpomaluje až do zastavení.

Určeme ještě blíže T_k. Rozmyslíme-li si, co říkají 1. a 2. impulzová věta, můžeme psát (uvažujeme moment setrvačnosti válce $1/2mR^2$):

$$\begin{aligned} v &= v_0 - fgt \qquad \text{(1. impulzová věta)} \\ mgfR &= \frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(2. impulzová věta)} \end{aligned}$$

tedy

$$\omega = \frac{2gft}{R}, \quad \text{jelikož} \quad \omega_{t=0} = 0.$$

Z podmínky $\omega R = v$ potom vychází $T_K = v_0/3gf$. Snadno ještě můžeme určit konečnou rychlost válce (dosazením T_k do rovnice pro rovnoměrně zpomalený pohyb). Vyjde $v_k = 2/3v_0$.

Energetický pohled: Energetický pohled na pohyb kvádru je jednoduchý. Na začátku má kvádr kinetickou energii $1/2mv_0^2$. V průbehu pohybu pak $1/2mv^2$. Rozdíl těchto energií je zcela přeměněn na teplo o velikosti $F_t s = mgfs$, kde s je uražená dráha.

U válce je situace poněkud komplikovanější. Nabízíme vám tento vcelku přirozený pohled: Na počátku je kinetická energie válce $1/2mv_0^2$. V průběhu pohybu pak $1/2mv^2 + 1/2I\omega^2$, kde oproti kvádru přibyl člen pro rotační kinetickou energii válce. Měla by platit bilance:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + E_{\mathrm{od}},$$

přičemž E_{od} je energie odebraná válci, která však nebyla přeměněna na jinou mechanickou energii a tudíž se vlastně jedná o teplo, které v průběhu tření vzniká a nakonec uniká do okolí. Zde je potřeba si uvědomit, jak E_{od} spočítat. Vraťme se proto na moment ke kvádru. Tam se teplo rovnalo třecí síle krát dráha, po které *kvádr třel o stůl.* Není důvodu se domnívat, že jinak by tomu mělo být u válce. Musíme si ale všimnout, že tato „třecí“ dráha není shodná s drahou, kterou válec skutečně urazí. Válec totiž dokáže urazit dráhu i bez toho, aby se povrchy o sebe třely — může se otáčet. Pohyb válce v našem příkladě si tak můžeme představit jako složení čistě otáčivého pohybu (otáčení představuje translační rychlost ωR) a „třecího“ translačního pohybu (zbytek do plné okamžité rychlosti v). Z toho uz snadno usoudíme, že „třecí“ dráha bude

$$s_t = \int_0^t (v - \omega R)\,\mathrm{d}t.$$

Vytvořené teplo pak je

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{od}} &= F_t\left(\int_0^t v\,\mathrm{d}t - \int_0^t \omega R\,\mathrm{d}t\right) = F_t s - \int_0^t F_t R\omega\,\mathrm{d}t \\ E_{\mathrm{od}} &= F_t s - \int_0^\phi F_t R\,\mathrm{d}\varphi\,, \end{aligned}$$

kde ϕ je celkový úhel, o který se válec do času t otočí. Podíváme-li se nyní na integrál na pravé straně, určitě si všimneme, že se vlastně jedná o práci, kterou bylo potřeba vykonat právě na roztočení válce, tedy integrál je roven $1/2I\omega^2$ ($R\mathrm{d}\varphi$ představuje elementární dráhu, po které působí síla F_t). Dosazením do energetické bilance tak dostáváme rovnici:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + F_t s.$$

Pomocí této rovnice už další rozbor uděláme snadno (všimněte si, že tato rovnice je totožná s energetickou rovnicí pro kvádr).

Poslední rovnice se dá odvodit i jinak, přes integraci pohybové rovnice pro těžiště (tečkou nad písmenem značíme derivaci podle času):

$$\begin{aligned}
ma_T &= m\dot{v}_T = F_t \\
mv_T\dot{v}_T &= F_t v_T \\
\int_0^t mv_T\dot{v}_T \,\mathrm{d}t &= \int_0^t F_t v_T \,\mathrm{d}t \\
-\int_{v_0}^{v} mv_T \,\mathrm{d}v_T &= \int_0^s F_t \,\mathrm{d}s \\
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + F_t s\,.
\end{aligned}$$

Toto odvození nám ale mnoho neříká o tom, co se ve skutečnosti v systému děje. Proto preferujeme výše uvedený postup. Nicméně stojí za to si uvědomit, že rovnice, kterou jsme takto odvodili, platí pro jakýkoli zpomalený pohyb (posune-li se těleso za působení konstantní odporové síly F podél dráhy s, platí $1/2mv_0^2 - 1/2mv^2 = Fs$, bez obledu na to, zda se těleso silou ještě i roztáčí či ne.)

Václav Porod & Rudolf Sýkora

Úloha III . 5 ... ***záplavy ve vesmíru*** *(4 body, řešilo 54 studentů)*

Mějme vodu v celém prostoru, aby ve stavu bez bublin nepůsobily žádné síly. Pokud ještě omezíme své pozorování pouze na dvě bubliny, oprostíme náš problém zcela od jevů, které nechceme bezprostředně zkoumat.

Když do libovolného místa vložíme jednu bublinu, vytvoří okolo sebe gravitační pole, jehož siločáry budou z bubliny vycházet, resp. intenzita gravitačního pole směřuje od bublinky (miniaturní tělísko bude od bublinky odpuzováno). To ukážeme jednoduše tak, že se pokusíme sečíst všechny gravitační síly, které působí na tělísko. Pokud budeme sčítat elementární síly, které na tělísko působí, vždy můžeme tyto síly spárovat tak, že se při vektorovém sčítání vždy dvě opačně orientované ve výsledném součtu navzájem vyruší. Jediná síla, která k sobě nemá opačný ekvivalent je v tom směru, kde leží naše bublinka. Na straně naší bublinky není hmotnost, kdežto na protější straně je hmotnost vody. Tj. síla na tělísko bude směrem od bubliny.

Co se děje s normální bublinkou, pokud ji umístíme do libovolného gravitačního pole? Začne se pohybovat proti vměru intenzity gravitačního pole a to díky Archimédovu zákonu.

Stejně tak se bude chovat druhá bublinka, kterou vložíme do zatopeného vesmíru. A vzhledem k tomu, že první bublinka vytváří pole s intenzitou směrem od sebe, bude se druhá bublinka pohybovat proti této intenzitě, tedy k první bublině. To tedy znamená, že se bublinky budou přitahovat.

Michal Hvězda & Jan Hradil

Úloha III . 6 ... *fyzik hudebníkem* *(8 bodů, řešilo 36 studentů)*

Ve vašich řešeních jste uváděli dvě různé metody pro určení koeficientu smykového tření.

Koeficient smykového tření (dále značeno μ) udává maximální velikost síly, která je reakcí na sílu snažící se změnit pohybový stav daného tělesa.

První metoda je dynamická. Na těleso položené na točící se desce gramofonu působí síla $F_{\mathrm{od}} = m\omega^2 r$, kde m je hmotnost tělesa, ω úhlová rychlost otáčení a r je vzdálenost tělesa od osy rotace. Proti odstředivé síle působí síla smykového tření F_{t}, která je nejvýše rovna maximální třecí síle dané koeficientem smykového tření:

$$F_{\mathrm{t}} \leq F_{\mathrm{t\,max}} = \mu m g.$$

K odpoutání tělesa od podložky dojde v okamžiku, kdy je odstředivá síla F_{od} rovna maximální třecí síle $F_{\mathrm{t\,max}}$. Do této doby je vždy $F_{\mathrm{od}} = F_{\mathrm{t}}$.

Následný způsob měření je jednoduchý: těleso vzdalujeme od osy rotace do okamžiku vyrovnání velikosti síly odstředivé a maximální třecí síly. Z takto zjištěného poloměru r vypočteme koeficient smykového tření následovně:

$$\mu = \frac{r\omega^2}{g}$$

Druhá metoda je statická, založená na přímém měření velikosti $F_{\mathrm{t\,max}}$, postup je následující:

1) Určíme moment M síly, kterým je kotouč gramofonu roztáčen.
2) Těleso položíme na kotouč (jež je v klidu, vzdálenost tělesa od osy r), zajistíme jej (držíme jej provázkem, je opřen o nějakou překážku, ...).
3) Spustíme motor gramofonu.

   Následně mohou nastat dvě situace:

   - Disk gramofonu se roztočí: moment smykové třecí síly byl menší než moment M. Těleso vzdálíme více od osy otáčení.
   - Disk se netočí. Moment maximální smykové třecí síly je větší než moment M. Těleso posuneme blíže do středu desky.

4) Motor gramofonu zastavíme.
5) Body 3 a 4 opakujeme do doby, dokud jsou nutné změny polohy tělesa pozorovatelné.

Koeficient smykového tření je určen:

$$\mu = \frac{M}{mgr}$$

S výpočtem statistických chyb vámi naměřených veličin jste si poradili dobře. Výjimkou bylo uvedení výsledku s relativní chybou asi 120% bez jejího řádného zdůvodnění.

Úloha S . III ... *kvantová mechanika* *(6 bodů, řešilo 21 studentů)*

a) Vlnová funkce částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě je obecně tvaru

$$\psi(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx).$$

Abychom splnili podmínku $\psi(0) = 0$, musí být $c_2 = 0$:

$$\psi(x) = c_1 \sin(kx).$$

Z druhé podmínky $\psi(L) = 0$ pak dostaneme:

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Protože funkce $\sin(kx)$ a $\sin(-kx)$ jsou závislé (druhá je jen mínus jedničkou pronásobená první), odpovídají stejnému stavu, a nevynecháme tedy žádnou možnou vlnovou funkci, pokud záporná n nebudeme uvažovat. Musíme také vyloučit případ $n = 0$, protože jemu odpovídá identicky nulová vlnová funkce. Výraz z minulé kapitoly udávající hustotu pravděpodobnosti pro ni nemá smysl (nelze dělit nulou), a proto identicky nulová vlnová funkce neodpovídá žádnému fyzikálnímu stavu. Všechny možné vlnové funkce naší částice jsou tedy dány předpisem:

$$\psi(x) = c_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vlnová délka částice v n-tém stavu je:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n},$$

takže jí odpovídá energie:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}.$$

Chceme-li mít funkci ψ normovanou, musíme zvolit c_1 tak, aby byl interál z druhé mocniny její absolutní hodnoty roven jedné:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_0^L |c_1|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = 1,$$

a protože střední hodnota druhé mocniny sinu na celé půlperiodě je 1/2 a délka intervalu je L, lze podmínku přepsat jako:

$$|c_1|^2 \frac{L}{2} = 1,$$

odkud plyne:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{L}} j,$$

kde j je libovolná komplexní jednotka. Vzhledem k tomu, že fáze naší vlnové funkce není podstatná, můžeme zvolit například $j = 1$:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Pokud označíme poloměr jádra helia R, bude pravděpodobnost výskytu elektronu v jádře:

$$P = \int_\Omega |\psi|^2 \mathrm{d}V = \int_0^R |\psi|^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r,$$

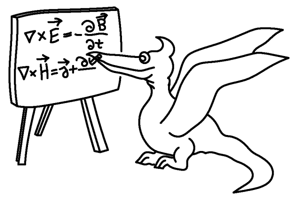
protože objem kulové slupky o poloměru r a tloušťce $\mathrm{d}r$ je $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Užijeme-li konkrétní tvar vlnové funkce, dostaneme:

$$P = \int_0^R \frac{Z^3}{\pi a_0^3} \mathrm{e}^{-2Zr/a} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 1 - \left(1 + 2Z\frac{R}{a_0} + 2Z^2\frac{R^2}{a_0^2}\right) \mathrm{e}^{-2ZR/a_0}.$$

Po dosazení $Z = 2$ a $R = 3{,}1 \cdot 10^{-5} a_0$ vychází $P = 3 \cdot 10^{-13}$.

c) Zanedbáme-li interakci mezi elektrony, můžeme říct, že jejich společná vlnová funkce je dána přímým součinem příslušných jednočásticových vlnových funkcí:

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{Z^3}{\pi a_0^3} \mathrm{e}^{-\frac{Zr_1}{a_0}} \mathrm{e}^{-\frac{Zr_2}{a_0}}$$



Seriál na pokračování

Kapitola 5: Kvantová teorie pole

Nerelativistická kvantová mechanika neobsahuje žádné rozpory a je velice uspokojivou teorií. Když se ale fyzikové v první polovině tohoto století snažili vytvořit kvantovou mechaniku, která by byla v souladu se speciální relativitou, narazili na velké problémy se zápornou hustotou pravděpodobnosti, komplexní energií a jinými patologickými skutečnostmi. Ukázalo se, že vnitřně konzistentní relativistickou kvantovou mechaniku jedné částice vůbec formulovat nelze, protože v jejím rámci není možné definovat pojem polohy částice. Není divu, že takové pokusy selhaly, podobná teorie by totiž nebyla schopna popsat procesy kreace a anihilace částic, které při relativistických energiích nastávají. Místo ní byla vytvořena kvantová teorie pole, perfektně popisující náš svět v místech, kde není příliš silné gravitační pole.

Speciální teorie relativity. Dříve než se začneme blíže bavit o kvantové teorii pole, bude možná dobré říct alespoň něco o speciální relativitě a zmínit vztahy, které by mohly být potřeba k vyřešení úloh z této kapitoly.

Jedná se o teorii vycházející z prvních dvou Newtonových zákonů v Newtonově formulaci, rovnoprávnosti inerciálních systémů a z empirického faktu, že světlo se ve vakuu šíří vždy stejnou rychlostí nezávislou na rychlosti zdroje. Speciální relativita reviduje pojmy prostoru, času a současnosti událostí. Polohy a časy událostí z hlediska různých inerciálních soustav již nejsou svázány známou Galileovou transformací, ale transformací Lorentzovou, z níž pak mimo jiné plyne vztah pro skládání rovnoběžných rychlostí:

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2},$$

který platí, pokud w je rychlost částice v naší soustavě a v její rychlost měřená v soustavě, jež se vůči nám pohybuje rychlostí u.

Hmotnost relativistické částice se dá vyjádřit jako:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

kde v je rychlost částice a m_0 její klidová hmotnost, tj. hmotnost měřená v inerciální soustavě vůči níž je částice v klidu. Klidová hmotnost částice letící rychlostí světla c musí být tedy nulová.

Kinetická energie částice je rovna rozdílu celkové a klidové energie:

$$T = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$$

a celková energie je s hybností svázána vztahem

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4.$$

Hybnost $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ je definována stejně jako v newtonovské mechanice. Pro částici s nulovou klidovou hmotností se rovnost zjednoduší na $E = pc$.

Ve speciální relativitě platí zákon zachování hybnosti ($\boldsymbol{p}$), energie (E), a tedy i hmotnosti (m), ale rozhodně není pravda, že by se musel zachovávat součet klidových hmotností jednotlivých částí izolovaného systému.

Kreace a anihilace částic. V mikrosvětě dochází velice často ke vzniku a zániku částic. Jako příklad může posloužit rozpad mionu na elektron, elektronové antineutrino a mionové neutrino:

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

nebo třeba β^- rozpad:

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Kvantová teorie pole povoluje v podstatě všechny přeměny, které neodporují zákonům zachování, a je schopna předpovědět, s jakou pravděpodobností která nastane. Pokud je povolena určitá reakce, může nastávat i proces, který dostaneme ubráním částice na jedné straně rovnice a přidáním příslušné antičástice na stranu druhou. Tímto způsobem dostaneme z β^- rozpadu rovnici rozpadu β^+:

$$p^+ \to n + e^+ + \nu_e.$$

Je třeba připomenout, že zatímco se volný neutron po chvíli rozpadá, β^+ rozpad je možný jedině v případě, že je protonu dodána z vnějšku energie, například v atomovém jádře s přebytkem protonů ostatními nukleony. Volný proton se nemůže tímto způsobem rozpadnout z jednoduchého důvodu. Pokud bychom se na něj dívali z jeho klidové soustavy, měl by celkovou energii $m_{0p}c^2 = 938,3$ MeV, zatímco energie částic na pravé straně poslední rovnice musí být větší nebo rovna součtu klidových energií $m_{0n}c^2 + m_{0e}c^2 = 940,1$ MeV.

Relace neurčitosti. Kromě relací neurčitosti mezi polohou a hybností se v kvantové fyzice uplatňuje i relace mírně odlišného charakteru:

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar,$$

která udává přesnost ΔE, s jakou lze změřit energii systému, pokud měření provádíme po dobu Δt. Znamená to, že zákon zachování energie neplatí zcela přesně a energie izolovaného systému se může změnit o ΔE, pokud tato fluktuace netrvá déle než po dobu $\hbar/\Delta E$. Díky tomu se může ve vakuu zrodit pár částice a antičástice a za chvíli zase anihilovat. Takové částice nazýváme virtuálními, protože nesplňují podmínku $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$ a není možné je pozorovat. Pokud jim ale dodáme energii převyšující součet jejich klidových energií, nemůže jim zákon zachování energie bránit v existenci a částice může svobodně opustit svou antičástici.

Úloha V . S ... *srážky a rozpady částic*

a) Pion π^0, který byl v laboratorní soustavě v klidu se rozpadnul na dva fotony:

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma.$$

Vypočítejte jejich energie.

b) Uvažujme rozpad pionu π^+, který byl v laboratorní soustavě také v klidu, na antimion a mionové neutrino:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu.$$

Zjistěte energii tohoto neutrina za předpokladu, že jeho klidová hmotnost je nulová. Při výpočtu je výhodné použít zákona zachování energie a hybnosti a rovnici $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$.

c) Pokud mají dva elektrony dostatečně velkou energii, může se při jejich srážce zrodit elektron-pozitronový pár:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^- + e^+.$$

Určete, jakou minimální energii a rychlost musí mít první elektron v laboratorní soustavě, pokud je druhý elektron v téže soustavě v klidu. Uvažte, že v mezním případě se při pohledu z těžišťové soustavy srazí dva elektrony s opačnými hybnostmi a všechny čtyři výsledné částice pak zůstanou prakticky stát.

Literatura

Arthur Beiser: Úvod do moderní fyziky, *Academia, Praha 1977.*

Alexandr Sergejevič Davydov: Kvantová mechanika, *SPN, Praha 1978.*

Jiří Formánek: Úvod do kvantové mechaniky, *Academia, Praha 1983.*

Jiří Formánek: Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole, *Karolinum, Praha 1998.*

Naše adresa: *FYKOS, KTF MFF UK*

V Holešovičkách 2, 180 00 Praha

e-mail: *fykos@mff.cuni.cz*