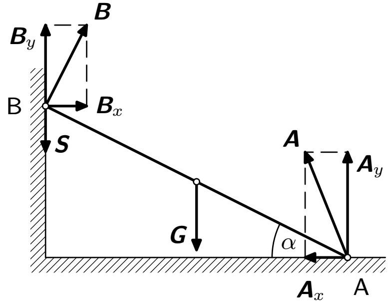
11. ročník, úloha I . 3 ... slepičí problém *(5 bodů; průměr ?; řešilo 39 studentů)*

Slepice se po obědě (12:00) chce dostat do kurníku. Neumí však létat, a jelikož žebřík po stěně kurníku klouže, začne bezradně běhat kolem něj. V kolik hodin se do kurníku dostane, když každou hodinu běhání shodí 40 g a ve 14 hodin hodlá snést vajíčko?

Ve 12:00 váží slepice $m = 1{,}7$ kg, vajíčko má hmotnost $m_v = 30$ g a žebřík $M = 5$ kg. Výška kurníku nad dvorkem je $h = 0{,}85$ m, sklon žebříku $\alpha = 25°$, součinitel smykového tření mezi kurníkem a žebříkem i mezi dvorkem a žebříkem je stejný $f = 0{,}7$.



Obr. 1

Tíhu žebříku označme $\boldsymbol{G}$ a tíhu slepice $\boldsymbol{S}$. Síla $\boldsymbol{S}$ nejvíce přispívá ke smykovým silám v B a nejméně k přítlačným silám v A, pokud působí v bodě B, a proto se budeme dále zabývat jen tímto případem. Čím je tato síla větší, tím více ohrožuje stabilitu v B, hledáme proto maximum pro $\boldsymbol{S}$. Aby byl žebřík v rovnováze, musí na něj působit na koncích síly $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, pro jejichž průměty do vodorovného a svislého směru (viz obr. 1) platí

$$A_x = B_x\,, \qquad A_y + B_y = G + S\,. \tag{1}$$

Moment těchto sil vzhledem k ose[1] kolmé k nárysně a procházející těžištěm žebříku[2] musí být rovněž nulový, a tak

$$(B_y - S)\cos\alpha + B_x \sin\alpha = A_y \cos\alpha - A_x \sin\alpha\,, \tag{2}$$

tedy

$$B_y - S + B_x \operatorname{tg}\alpha = A_y - A_x \operatorname{tg}\alpha\,. \tag{3}$$

Konečně při maximální hodnotě S, kdy ještě žebřík nespadne, platí

$$fB_x = B_y\,, \qquad fA_y = A_x\,. \tag{4}$$

Řešením výše uvedených pěti rovnic pro pět neznámých A_x, A_y, B_x, B_y, S získáme hledanou hodnotu S. Z rovnic (1), (4) vzájemným dosazováním vyjádříme A_x, A_y, B_x, B_y pomocí f, G, S

$$A_y = \frac{G+S}{1+f^2}\,, \quad B_y = \frac{(G+S)f^2}{1+f^2}\,, \quad B_x = \frac{(G+S)f}{1+f^2}\,, \quad A_x = \frac{(G+S)f}{1+f^2}\,;$$

A_y bylo vyjádřeno z (4) po dosazení $B_x = A_x$ ($f^2 A_y = B_y$) a dále z 2. rovnice (1), další je již snadné. Nyní dosadíme vše do (3) a vypočteme S a hmotnost slepice m_S ($G = Mg$, $S = m_S g$)

$$S = G\frac{f^2 + 2f\operatorname{tg}\alpha - 1}{2(1 - f\operatorname{tg}\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad m_S \approx 530 \text{ g}\,.$$

Do dvou hodin určitě slepice tolik nezhubne, takže odtučňovací kúra bude trvat $(1{,}7 - 0{,}03 - 0{,}53)/0{,}04$ h ≈ 28 h 31 min za předpokladu, že již dále nic nesnese ani nepozře. Zdecimovaný pták tedy na hřad usedne až druhý den kolem půl páté odpoledne.

[1] $M = rF\sin\varphi$, pokud rameno r se sílou F svírá úhel φ.

[2] Rovnice pro moment sil vzhledem k ose procházející jiným bodem je s (1), (2) a (3) závislá, tj. lze ji získat sčítáním a odčítáním (vhodných násobků) těchto rovnic.

Závěrem jeden námět pro další bádání. Zkuste položit $S = 0$ a vyšetřete, jaké síly $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ pak působí na žebřík. Z výše uvedeného vidíme, že žebřík neuklouzne, a tedy budou v (4) místo rovností platit pouze nerovnosti $\geq$. Zamyslete se nad ději, ke kterým může dojít při ustavování rovnováhy. Pak možná pochopíte některé negativistické poznámky ve vašich řešeních týkající se těchto sil. Opravovatel časem seznal, že je přípustný i jednoduchý (výše uvedený) pohled na problém, a proto se za případnou jedovatost svých poznámek omlouvá.

Karel Výborný

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.