11. ročník, úloha II . 1 ... korálky *(6 bodů; průměr ?; řešilo 43 studentů)*

Na tyči zanedbatelné hmotnosti o celkové délce $4a$ jsou navlečeny symetricky ve vzdálenosti a od osy otáčení dvě koule o hmotnosti m. Na obou koncích tyče jsou umístěny dokonale pružné odrazné destičky. Tyč je roztočena na úhlovou rychlost ω_0 a poté jsou uvolněny obě koule. Za předpokladu, že se tyč nadále pohybuje volně a bez tření určete:

a) *Po jaké trajektorii se budou pohybovat obě kuličky vzhledem k pozorovateli v inerciální soustavě.*
b) *Jak se bude měnit úhlová rychlost soustavy ω v závislosti na čase.*
c) *Jak by se změnily výsledky předešlých úloh, kdybychom udržovali (např. pomocí motoru) úhlovou rychlost na konstantní hodnotě ω_0.*

1. Ponecháme-li soustavu po uvolnění kuliček volně se pohybovat, nebude na kuličky z hlediska vnějšího pozorovatele v inerciální soustavě působit žádná síla, a proto se budou pohybovat rovnoměrně přímočaře až do okamžiku, kdy narazí na zarážku. Protože směr rychlosti bude v tomto okamžiku svírat s tyčí úhel 30 stupňů, a protože ten stejný úhel bude mít rychlost vůči tyči i po odrazu, bude se kulička pohybovat po obvodu rovnostranného trojúhelníka. Závislost $\omega(t)$ lze řešit několika způsoby, např. ze zákona zachování momentu hybnosti, řešením rovnice $\ddot{r} = \omega^2 r$. Zde si ukážeme tento postup rozložíme rychlost do směru rovnoběžného s tyčí a do směru kolmého na tyč $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\perp + \boldsymbol{v}_\parallel$. Pro velikost $v_\perp$ platí, že $v_\perp = v\cos\varphi$, a zároveň $v_\perp = \omega r$, kde $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ a $x = vt$. Pro $\cos\varphi$ lze ovšem psát $\cos\varphi = a/r$, a tedy výsledně $\omega = va/(\omega^2 + v^2t^2)$. Uvážíme-li nyní, že $v = \omega_0$, obdržíme výsledek $\omega = \omega_0/(1 + \omega_0^2 t^2)$, což je hledaný vztah.
2. Budeme-li udržovat rychlost konstantní, bude $\omega = \omega_0$ a pro trajektorii musíme napsat rovnici $\ddot{r} = \omega^2 r$ jejímž řešením pro podmínky $r(0) = a$ a $\dot{r}(0) = 0$ je funkce $r(t) = a\cosh(\omega_0 t)$ a $\varphi(t) = \omega_0 t$ což jsou parametrické rovnice trajektorie kuliček. Tyto dráhy už netvoří uzavřenou křivku (jako např. trojúhelník). V první části, pokud jste přišli na to, že se kuličky pohybují po přímce, chyby vesměs nebyly, ve druhé části úlohy jste někteří psali, že $r(t) = \mathrm{e}^{\omega_0 t}$, což není pravda ($\dot{r}(0) = v_\perp = 0$). Také jste ve většině případů opomíjeli vliv Coriolisovy síly (i když se neprojeví, neboť má směr kolmý k tyči).

Tomáš Drbohlav

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.