**11. ročník, úloha II . 2 ... odraz kuličky** *(4 body; průměr ?; řešilo 47 studentů)*

*Gumová kulička o průměru 1 cm dopadá na ocelovou desku z výšky dvou metrů. Odhadněte řádově, jak velké bude její průměrné zrychlení během odrazu.*

Ze zákona zachování energie (například) určíme, že kulička padající z výšky $h$ bude mít těsně před dopadem rychlost $v_0 = \sqrt{2gh}$. Pokud není kulička ideálně pružná, bude mít po odrazu rychlost $\varepsilon v_0$, kde koeficient restituce $0 \leq \varepsilon < 1$. Snadno lze experimentálně ověřit, že třeba u „hopíku“ je rozhodně $\varepsilon > 0{,}5$. Pro řádový odhad tedy stačí uvažovat, že během nárazu se rychlost míčku změní z $v_0$ na $-v_0$. Průměrné zrychlení při odrazu $\bar{a}$ bude pak rovno

$$\bar{a} = \frac{(1+\varepsilon)v_0}{t} \approx \frac{2v_0}{t}\,,$$

kde $t$ je doba trvání odrazu. Zjištění $t$ je hlavním kamenem úrazu. V zadání úlohy jsme se sice ptali na řádový odhad, i ten je ovšem potřeba na něčem založit. Použitelný model navrhl Karel Kolář ze Sušice.

Předpokládáme, že kulička o původním průměru $d$ se při nárazu deformuje do tvaru rotačního elipsoidu a podložka se nedeformuje (což mnozí správně odůvodnili srovnáním Youngových modulů pružnosti v tlaku u gumy a u oceli). Bude-li v nějakém okamžiku při nárazu výška kuličky (tj. délka její nejkratší osy) rovna $y$, znamená to, že „všechny rozměry kuličky ve svislém směru budou zmenšeny v poměru $y/d$“. Tedy pokud kuličku rozřežeme na tenké svislé nudličky, bude délka libovolné nudličky $y_x(y/d)$, kde $y_x$ je délka této nudličky před nárazem. Označme „absolutní stlačení“ kuličky $x = (d-y)/2$. Předpokládáme-li, že materiál kuličky splňuje Hookův zákon[1], bude síla, kterou působí každá taková nudlička proti stlačení, rovna

$$F_S = \sigma_S S = -SE\,\frac{\Delta y_x}{y_x} = -SE\,\frac{y_x - y_x(y/d)}{y_x} = -SE\,\frac{2x}{d}\,,$$

kde $E$ je Youngův modul pružnosti gumy v tlaku a $S$ plocha kolmého řezu ke svislé ose nudličky. Znaménko minus říká, že síla působí proti stlačení. Pokud nepředpokládáme další jevy typu „nudličky po sobě kloužou“, můžeme celkovou sílu, kterou kulička působí na podložku, vysčítat přes všechny nudličky. Protože $F_S$ při daném stlačení závisí pouze na ploše řezu $S$ zkoumané nudličky, bude celková síla rovna

$$F = -E\,\frac{\pi d^2}{4}\,\frac{2x}{d} = -\frac{\pi d E}{2}\,x\,.$$

Veličina $x$ má význam výchylky těžiště kuličky od rovnovážné polohy, kdy se kulička právě dotýká podložky bez deformace. Vidíme, že tato síla je stejná jako u pružiny o tuhosti $k = \pi d^2 E/(2d)$ (tj. $F = -kx$). Je-li na takové pružině umístěno závaží o hmotnosti $m$, víme, že bude kmitat s frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$ nezávisle na amplitudě kmitů (tedy počáteční rychlosti). V našem případě je $m$ hmotnost kuličky ($m = \varrho\pi d^3/6$ při hustotě kuličky $\varrho$). Od prvního kontaktu s podložkou do okamžiku odskoku vykoná kulička půl kmitu, což jí bude trvat $t = \pi/\omega$. Celkem tedy dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{2\pi m}{Ed}}\,, \qquad \bar{a} = \sqrt{\frac{24Egh}{\pi^2\varrho}}\,\frac{1}{d}\,.$$

[1] To závisí mimo jiné na míře deformace a lze o tom dále diskutovat.

Pokud bereme $E \approx 1{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$ a $\varrho \approx 1000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, dostáváme $\bar{a} \approx 2{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ (to je samozřejmě více než jen řádový odhad).

***Karel Výborný***