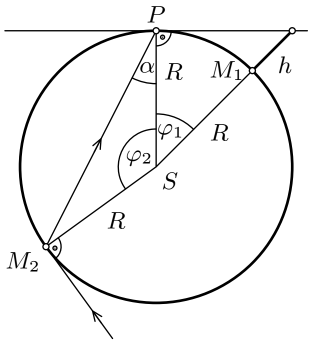
11. ročník, úloha II . 3 ... *ze života hmyzu* *(3 body; průměr ?; řešilo 65 studentů)*

Na skleněné kouli o poloměru R sedí hladový pavouk. Nejraději jí mouchy a zrovna jedna sedí na stejné kouli. Najděte pro mouchu takovou polohu na kouli, aby jí pavouk neviděl. Předpokládejte, že pavouk má oči zhruba v jednom bodě ležícím na kouli, a že moucha je vysoká h.

Označme P bod, kde stojí pavouk, M bod, kde sedí moucha, S střed koule. Polohu bodu M budeme charakterizovat úhlem MSP (tím je bod M určen až na otočení kolem osy PS, což zjevně nevadí).



Obr. 1

Pavouk může vidět mouchu buď přímým pohledem, nebo skrz kouli. Rozeberme první případ. Protože má pavouk oči u povrchu koule, jeho „obzor“ je určen tečnou rovinou ke kouli v bodě P. Pokud moucha protne tuto rovinu, bude spatřena. Mezní polohu mouchy označme M_1. Vidíme, že pro úhel $\varphi_1 = M_1SP$ platí

$$\cos\varphi_1 = \frac{R}{R+h}\,.$$

Bude-li úhel MSP větší než φ_1, moucha nebude vidět přímým pohledem.

Paprsek se na rozhraní vzduch — sklo lomí ke kolmici, tedy úhel, pod kterým dopadá na kouli je větší, než úhel, pod kterým se lomí do koule. Proto pavouk vidí níže, než se dívá, takže existuje oblast, kam skrz kouli nikdy nedohlédne. Nejvýše uvidí, pokud se bude dívat do koule pod úhlem co nejbližším k 90°. Spočteme tedy onu mezní hodnotu, kdy se dívá pod úhlem $\pi/2$. Ze Snellova zákona platí

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\sin\alpha} = \frac{n}{1}\,,$$

kde n je relativní index lomu skla proti vzduchu. (Tento vztah je vlastně zároveň podmínka pro totální odraz.) Bod, kam pavouk dohlédne tímto způsobem, je na obrázku 1 označen M_2. Zbývá dopočítat úhel $M_2SP = \varphi_2$

$$\varphi_2 = \pi - 2\alpha = \pi - 2\arcsin\frac{1}{n}\,.$$

Bude-li úhel MSP menší, než φ_2, pak žádný paprsek, který od mouchy projde do koule, se nemůže lomit do bodu P (to, že se pavouk dívá do koule pod nějakým úhlem znamená, že k němu přichází paprsek z dotyčného úhlu). Neuvažujeme samozřejmě situaci, kdy paprsek na rozhraní sklo — vzduch se dělí na dvě části, z nichž jedna se lomí ven a druhá se odráží dovnitř. Odraz dovnitř berme zanedbatelný.

Zbývá složit obě zjištěné podmínky. Bude-li úhel MSP zároveň větší než φ_1 a menší než φ_2, pavouk mouchu neuvidí. Množina takových bodů tvoří kulový pás, pokud ovšem není prázdná. Mělo by nás zajímat, zda úloha má vůbec pro mouchu řešení, tj. zda není náhodou $\varphi_1 > \varphi_2$. Index lomu skla není úplně jednoznačný, záleží na druhu skla. Obvyklé hodnoty bývají od 1,5 do 1,8, v každém případě tedy větší, než $\sqrt{2}$. Proto $\alpha < \pi/4$ a tedy $\varphi_2 > \pi/2$. Samozřejmě $\varphi_1 < \pi/2$ pro libovolně velké h, a proto určitě platí $\varphi_1 < \varphi_2$ nezávisle na vstupních podmínkách. Moucha tedy zaručeně má šanci.

Úloha nebyla příliš složitá, přesto hezká řešení byla spíše výjimkou. Vaše argumentace byla často mírně chaotická (kupříkladu je podivné mluvit o paprsku, který vysílá pavoukovo oko). Rád bych také vyvrátil jednu rozšířenou fámu, že v kouli může dojít k úplnému odrazu. Paprsek, který by se měl na rozhraní sklo — vzduch úplně odrážet, se do koule nemůže nikdy dostat, protože úhel, pod kterým přichází na toto rozhraní, je stejný jako úhel, pod kterým se paprsek láme do koule, a ten je menší, než mezní (ze Snellova zákona). Řešením na této fámě založeným jsem ubral bod. Stejně tak jsem strhával bod, pokud vás ani nenapadlo, že by úloha také nemusela mít řešení a hrdě jste hovořili o kulovém pásu.

David Stanovský

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.