11. ročník, úloha II . 4 ... kapka deště *(3 body; průměr ?; řešilo 59 studentů)*

Jeden náš řešitel, který se vracel ze soustředění za deštivého počasí vlakem domů si všiml, že kapky na skle vytvářejí přímé stopy. Změřil, že jsou od svislého směru odkloněny o úhel $\alpha = 35^\circ$. Určete jakou rychlostí jel vlak, mají-li kapky poloměr $r = 2\,\mathrm{mm}$.

Zadání této úlohy bylo možné chápat (nejméně) dvěma způsoby. 1. varianta: Kapky padají nějakou rychlostí v blízkosti vlaku, občas nějaká z nich dopadne na okno a při dopadu za sebou zanechá stopu. 2. varianta: Jak se kapky dostaly na sklo nás nezajímá, zkoumáme děj, při němž kapky zachycené na skle sjíždějí šikmo dolů.

Řešení 1. varianty

Na kapku padající z nebes na zem působí tíhová síla $F_g = mg$ (m je hmotnost kapky, g je tíhové zrychlení) a síla odporu prostředí, kterou spočteme z Newtonova vzorce

$$F_o = \frac{1}{2} C S \varrho_{\mathrm{vz}} v_{\mathrm{kap}}^2$$

(C je konstanta, S je průřez kapky, ϱ_{vz} je hustota vzduchu, v_{kap} je okamžitá rychlost kapky).

Určení tvaru kapky (a tím i jejího S a C) je poměrně obtížné. Pro zjednodušení jej budeme považovat za kulový. Pak bude $S = \pi r^2$, $C = 0{,}48$ a objem kapky $V = 4/3\pi r^3$. Její hmotnost je pak $m = 4/3\pi r^3 \varrho_{\mathrm{kap}}$ (ϱ_{kap} je hustota vody).

Kapka je zpočátku svého pohybu urychlována tíhovou silou, zároveň však narůstá odporová síla. Poté, co se tyto dvě síly vyrovnají, padá kapka s konstantní rychlostí, kterou spočteme z rovnosti $F_g = F_o$. Když dosadíme za m a S, dostaneme

$$v_{\mathrm{kap}} = \sqrt{\frac{8 r g \varrho_{\mathrm{kap}}}{3 C \varrho_{\mathrm{vz}}}}\,.$$

Podle zadání platí pro v_{kap} a v_{vlak} (rychlost vlaku) $\operatorname{tg}\alpha = v_{\mathrm{vlak}}/v_{\mathrm{kap}}$. Z toho dopočítáme

$$v_{\mathrm{vlak}} = \operatorname{tg}\alpha \sqrt{\frac{8 r g \varrho_{\mathrm{kap}}}{3 C \varrho_{\mathrm{vz}}}}\,.$$

Když dosadíme číselné hodnoty $\alpha = 35^\circ$, $r = 2{,}0\,\mathrm{mm}$, $\varrho_{\mathrm{kap}} = 1000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $\varrho_{\mathrm{vz}} = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $C = 0{,}48$ dostaneme $v_{\mathrm{vlak}} = 6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 24\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Řešení 2. varianty

Abychom tento problém mohli vyřešit, musíme předpokládat, že povrchové síly jsou dostatečně silné (abychom mohli použít Newtonův vztah) a působí jen kolmo k rovině skla (aby neovlivňovaly trajektorii). Zejména druhý předpoklad splněn nebývá.

Na kapku na skle působí v rovině pohybu síla gravitační $F_g = mg$ a síla odporu prostředí $F_o = 1/2 C S \varrho_{\mathrm{vz}} v_{\mathrm{vlak}}^2$. Jejich výslednice udává směr ve kterém se bude kapka pohybovat. Vzhledem k tomu, že kapka na skle má tvar přibližně polokoule bude $S = \pi r^2/2$ a $C = 0{,}48$. Objem kapky spočítáme jako $V = 2/3\pi r^3$. Pro úhel α platí $\operatorname{tg}\alpha = F_o/F_g$. Dosazením získáme rychlost vlaku

$$v_{\mathrm{vlak}} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \frac{8 r g \varrho_{\mathrm{kap}}}{3 C \varrho_{\mathrm{vz}}}}\,.$$

Když dosadíme číselné hodnoty $\alpha = 35^\circ$, $r = 2{,}0\,\mathrm{mm}$, $\varrho_{\mathrm{kap}} = 1000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $\varrho_{\mathrm{vz}} = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $C = 0{,}48$ dostaneme $v_{\mathrm{vlak}} = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 29\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Na závěr několik poznámek k reálnosti námi spočítaných hodnot.

Proudění vzduchu okolo vlaku bude zcela jistě nelaminární, což jsme neuvážili. Vzhledem k tomu, že neznáme přesný tvar kapky, je použití koeficientu $C = 0{,}48$ diskutabilní (ve skutečnosti bude zřejmě o něco nižší). O tom, že mají kapky tvar více kulový než aerodynamický, se můžeme přesvědčit například v Malém průvodci meteorologií (Mladá fronta Praha 1989). K měření rychlosti vlaku se obě námi popsané metody nehodí také proto, že ve výsledných rovnicích vystupuje poloměr kapky, který by se v terénu měřil obtížně (bývá 1–3 mm). Ve druhé variantě se také projeví nepříznivě vliv povrchových sil.

Jiří Franta

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.