11. ročník, úloha III . 1 ... jeřáb *(6 bodů; průměr ?; řešilo 56 studentů)*

Jeřáb může zdvihat břemeno pouze konstantní svislou silou F. Budeme jím zvedat ze země nekonečné lano o délkové hustotě λ. Jakou maximální rychlost jeho horní konec během pohybu dosáhne? Jakou maximální výšku dosáhne?

Úloha je zákeřná v tom, že na ni nelze použít druhý Newtonův zákon ve formulaci $F = ma$, platné pouze v případě, že hmotnost tělesa je konstantní. Je třeba vyjít ze vztahu

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,,$$

tj. síla je rovná změně hybnosti za jednotku času. Další nemilé překvapení je, že zákon zachování mechanické energie je přímým důsledkem vztahu $F = ma$.

Poznámka: Kdekoliv v dalším textu narazíte na symbol $\mathrm{d}x$ a nebudete mu rozumět, představte si místo něj Δx. Podobně z $\int$ učiňte $\sum$.

Pokud se těleso neměnné hmotnosti pohybuje za působení konzervativního[1] silového pole (gravitační síly a síly jeřábu), uvolněná potenciální energie (do níž je zahrnuta i síla jeřábu) se zcela přemění na energii kinetickou. Pokud ovšem během pohybu hmotnost tělesa vzroste o Δm, musí se z potenciální energie uhradit i urychlení přírůstku Δm na rychlost celého tělesa. Část energie se tedy zdánlivě „ztrácí“. Pomocí úvah v tomto směru dospěl *Milan Kocián* k dílčím výsledkům, a to bez použití derivací.

Předvedeme nyní řešení úlohy přímo z pohybových rovnic. Označíme z výšku konce lana a λ délkovou hustotu lana. Z druhého Newtonova zákona dostaneme

$$F - \lambda z g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\,, \tag{2}$$

neboť $\lambda z = m$, $\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}t = v$ a $p = mv$. Dosazením (1) do (2) dostaneme

$$F - \lambda z g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\,. \tag{3}$$

Vynásobením $z\,\mathrm{d}z$ obdržíme

$$F z\,\mathrm{d}z - \lambda g z^2\,\mathrm{d}z = z\,\mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\,. \tag{4}$$

Zintegrujeme-li (4) podle t, získáme

$$\int \left(F z - \lambda g z^2\right)\mathrm{d}z = \lambda \int z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\left(z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\,. \tag{5}$$

Provedeme-li substituci $z\,\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}t = q$, dostane pravá strana (5) tvar $\lambda \int q\,\mathrm{d}q$, což po integraci dá $\frac{1}{2}\lambda q^2 + \mathrm{const.}$ Po dosazení za q a zintegrování levé strany obdržíme

$$\frac{1}{2}\frac{F}{\lambda} z^2 - \frac{1}{3} g z^3 = \frac{1}{2}\left(z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + C\,, \tag{6}$$

[1] Konzervativní je pole, ve kterém lze definovat potenciální energii. Problémy nastávají například s magnetickým polem nebo při započítání tření.

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek úlohy. Pro speciální případ $z = 0$ se rovnice (6) zjednoduší na $C = 0$, rovnice však musí platit pro libovolné z, tedy musí být $C = 0$.

Vykrátíme-li z^2, dostaneme

$$\frac{1}{2}\frac{F}{\lambda} - \frac{1}{3}gz = \frac{1}{2}v^2 . \tag{7}$$

Po úpravě

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gz}{3}} .$$

Nyní pro zajímavost uveďme, jak by se získala závislost z na t

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{F/\lambda - 2gz/3}} = \mathrm{d}t .$$

Zintegrováním obou stran rovnice

$$-\frac{3}{g}\sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gz}{3}} = t - t_0 \quad \Rightarrow \quad z = z(t) = \frac{3F}{2\lambda g} - \frac{g}{6}(t - t_0)^2 .$$

Nyní máme tedy vyjádřenu rychlost na poloze a dokonce i polohu na čase (t_0 čas, kdy konec lana dosáhne maximální výšky). Pro odpověď na zadané otázky stačí jen první závislost

Z rovnice (7) je zřejmé, že maximální rychlosti dosáhne konec lana zřejmě při $z = 0$, pak bude $v_{\max} = \sqrt{F/\lambda}$ a maximální výšky dosáhneme pro $v = 0$, což nastane při $z = 3F/(2\lambda g)$. To je vidět i ze závislosti $z(t)$: shledáváme, že konec lana se pohybuje *rovnoměrně zpomaleně* se zrychlením $a = g/3$ (srovnej s $s = gt^2/2$).

Ze závislosti $z(t)$ vyplývá, že po určitém čase zase lano (přes veškerou snahu jeřábu) zase spadne na zem[2]! Kupodivu to není chyba; pokud bychom do úlohy (tj. do pohybové rovnice) zavedli tlumení (například brzdnou sílu úměrnou rychlosti), z (neharmonického) periodického kmitání by se staly tlumené kmity blížící se k rovnovážné poloze $z = F/(\lambda g)$. Řešení takové rovnice už je ovšem nanejvýš vhodné ponechat počítači.

Tato zdánlivě jednoduchá úloha nechť všem slouží jako varování před slepým používáním notoricky protřelých vzorečků. Nikdy nezapomínejte na fyziku, která za každým takovým vzorečkem stojí, a zamyslete se nad předpoklady, za nichž lze ten který exemplář použít. Zároveň, pokud žádný z nich nepomáhá, neklesejte na mysli a zkuste raději použít selský rozum, i za to se dávají body.

Karel Výborný & Martin Krsek

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] A celý děj se může opakovat.