11. ročník, úloha V . 2 ... hradní studna *(4 body; průměr ?; řešilo 54 studentů)*

Řešitel Fykosu měřil hloubku hradní studny. Vzal si na pomoc stopky a kámen. Kámen vhodil do studny a současně spustil stopky. Zastavil je poté, co uslyšel náraz kamenu na dno. Stopky ukázaly údaj 4,77 s. Jelikož si náš přítel pamatoval velikost tíhového zrychlení a rychlost zvuku, ihned na místě spočítal hloubku (vyschlé) studny. Dokážete to také? Určete zároveň chybu popsaného měření.

Nejprve zde ukáži nejjednodušší model popsané situace a pak budu diskutovat jeho vhodnost pro náš problém, možná vylepšení a nakonec i zadáním požadovanou chybu měření.

V prvním přiblížení můžeme brát, že kámen padá do hloubky studny h volným pádem s tíhovým zrychlením g po dobu t_1 a poté za čas t_1 dorazí zvuk ze dna k uchu pozorovatele. Student potom naměří na stopkách čas t, který je roven součtu $t = t_1 + t_2$, při označení rychlosti zvuku jako v můžeme psát

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}\,.$$

Poslední vztah snadno jednoduchými matematickými úpravami převedeme na kvadratickou rovnici

$$h^2 + h\left(\frac{-2tv - 2v^2}{g}\right) + v^2t^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad h = tv + \frac{v^2}{g} \pm \frac{1}{g}\sqrt{v^4 + 2v^3gt}\,.$$

Ze dvou kořenů této rovnice má fyzikální smysl ten menší (neboť ten větší by dával h větší než délku vt, což není možné), proto řešením naší úlohy je

$$h = tv + \frac{v^2}{g} - \frac{1}{g}\sqrt{v^4 + 2v^3gt}\,.$$

Pokud nyní dosadíme číselné hodnoty, dostaneme $h = 98{,}6\,\mathrm{m}$ (závisí na tom, v jakých tabulkách hledáme příslušné konstanty).

Předcházející model nám ukazoval nejjednodušší způsob, jak se k úloze postavit. Provedli jsme však při něm mnohá zanedbání. Záleží samozřejmě na fyzikálním citu, co zanedbat lze a co naopak může výsledek ovlivnit viditelněji.

- Při výpočtu jsme neuvažovali odpor vzduchu. Pokud se pokusíme tuto skutečnost uvážit, je důležité umět si vybrat, který ze vztahů pro odporovou sílu je vhodné použít. Fyzika nám zde nabízí vzorce Newtonův, Stokesův, Karmánův, ..., každopádně každý z nich vyžaduje znát o kameni spoustu parametrů. Pokud se pro náš pád kamene (vzhledem k jeho rychlostem a vlastnostem vzduchu) rozhodneme pro vzorec Newtonův a pokud se pokusíme odhadnout vhodně parametry kamene, může se nám výsledek změnit až o deset metrů (výpočet vede na jednoduchou obyčejnou diferenciální rovnici).
- Při výpočtu jsme též brali rychlost zvuku jako konstantu. To rovněž není tak úplně pravda, neboť rychlost zvuku závisí na teplotě, která zase závisí na hloubce studny. Vzhledem k tomu, že přesněji odhadovat rozložení teploty studny není věc snadná, můžeme se pokusit tento fenomén odhadnout lineárním modelem (tj. závislost rychlosti zvuku na hloubce je lineární funkcí) a po ne příliš komplikovaném výpočtu při vhodných volbách teplot dozná výsledek změny řádově o desítky centimetrů. Takže tento fenomén je vůči ostatním naprosto zanedbatelný.
- Zvídavého řešitele by též mohlo napadnout, zda-li je ve výpočtu vůbec zapotřebí počítat s rychlostí zvuku, tj. jestli nám nepostačí počítat pouze hloubku volného pádu kamene za

dobu t. Jednoduchý výpočet by v takovém případě dal hloubku studny přes 110 metrů, takže tento jev se do našeho modelu zahrnout vyplatí.

Nyní se budeme zabývat chybou měření. Uvedený experiment měl několik zásadních chyb. Dle výše uvedených úvah by se nám pro přesnější řešení hodilo zahrnout do výpočtu vliv odporových sil. Pro Newtonův vztah bychom potřebovali znát průřez kamene a něco z jeho geometrie (pro součinitel odporu), bohužel nám je experimentátor nedodal. Další jeho chybou bylo, že prováděl pouze jedno měření.

Pokusíme se odhadnout nyní chybu měření kvantitativně. Nejprve musíme určit chybu při měření času. Ačkoliv jsme dostali naměřený čas s přesností na setiny sekundy ($t = 4{,}77\,\mathrm{s}$), není možné brát, že chyba stanovení tohoto údaje byla pět tisícin vteřiny. Ve skutečnosti se na tomto údaji podepsala v nezanedbatelné míře chyba způsobená reakční dobou člověka (tu můžeme u obyčejných lidí odhadnout na $0{,}1\,\mathrm{s}$–$0{,}3\,\mathrm{s}$, u matfyzáků i na několik hodin). Pokud vezmeme $0{,}2\,\mathrm{s}$ a budeme-li vycházet z původního bezodporového modelu, snadnými matematickými úpravami (např. spočtením h pro $4{,}57\,\mathrm{s}$ a $4{,}97\,\mathrm{s}$) můžeme dojít k chybě měření až kolem deseti metrů. Výsledek pak můžeme vyjádřit jako $h = (100 \pm 10)\,\mathrm{m}$.

Radek Erban

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.