11. ročník, úloha V . P ... samopal *(6 bodů; průměr ?; řešilo 32 studentů)*

Rozhodněte jak těžkou krychli lze převrátit střelbou ze samopalu (či spíše menšího děla) o parametrech 50 střel za sekundu, rychlost střely 500 m·s⁻¹, hmotnost střely 100 g. Krychle má hranu dlouhou 1 m, po podložce neklouže.

Nejvýhodnější bude zřejmě střílet na krychli kolmo k úhlopříčce tak, aby ji střely zasáhly v hraně ležící proti hraně, okolo níž se bude krychle natáčet (jelikož krychle po podložce neklouže, můžeme si tam představit třeba pant). Takto letící střely budou mít vůči ose otáčení největší moment hybnosti. Pro jednoduchost uvažujme, že samopalem můžeme v průběhu střelby otáčet tak, aby se moment hybnosti střel neměnil, a že se střely odrážejí, tj. hmotnost krychle je konstantní. Předpokládejme též, že se odrážejí ve směru úhlopříčky, takže jejich výsledný moment hybnosti je nulový. To lze zdůvodnit tím, že rychlost bodu krychle, na nějž střela dopadne, bude malá oproti rychlosti střely, a bude tedy platit zákon dopadu a odrazu.

Při dopadu střely platí zákon zachování momentu hybnosti

$$mv\sqrt{2}a = J\omega_0\,,$$

kde m je hmotnost střely, v její rychlost, a délka hrany krychle, J moment setrvačnosti krychle vzhledem ke hraně a ω_0 předaná úhlová rychlost. Moment setrvačnosti určíme buď pomocí tabulek a Steinerovy věty, nebo přímou integrací

$$J = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2)\varrho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \varrho\left[\left[\left[z\left(\frac{x^3}{3}\,y + x\,\frac{y^3}{3}\right)\right]_0^a\right]_0^a\right]_0^a = \varrho\,\frac{2}{3}\,a^5 = \frac{2}{3}Ma^2\,.$$

Krychle tedy na začátku získá úhlovou rychlost ω_0, po dobu $T = 1/f$, kde f je frekvence střelby (kadence), se pohybuje podle pohybové rovnice pro otáčení v tíhovém poli až do dopadu na podložku, převrácení se nebo příletu další střely, pak se její rychlost opět skokem změní o ω_0 a tak pořád dokola. Pokud si parametrizujeme polohu krychle úhlem natočení její spodní stěny oproti podložce α, má pohybová rovnice pro ono mezidobí mezi přílety dvou střel tvar

$$J\ddot{\alpha} = -Mg\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\,,$$

kde M je hmotnost krychle. Výraz na pravé straně představuje moment tíhové síly vzhledem k ose otáčení. Tato rovnice je díky přítomnosti goniometrické funkce analyticky neřešitelná, budeme se tedy muset uchýlit k aproximacím. Pokud nahradíme kosinus v prvním přiblížení konstantou $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, redukuje se problém pohybu krychle po příletu první střely na variaci na téma volný pád. Řešením je

$$\alpha = \omega_0 t - \frac{1}{2}\frac{Mga}{2J}t^2\,,$$
$$\omega = \omega_0 - \frac{Mga}{2J}t\,.$$

Kulminace nastane v čase

$$\tau = \frac{2J\omega_0}{Mga} = \frac{2\sqrt{2}\,mva}{Mga} = \frac{2\sqrt{2}\,mv}{Mg}$$

a dopad zpět v čase dvojnásobném. Mezní perioda střelby leží mezi těmito dvěma časy, neboť střela, která přiletí před kulminací krychli určitě převrátí (moment tíhové síly pro druhou střelu je o trošičku menší než pro první a krychli zbyla ještě nějaká rychlost směrem nahoru), ale střela, která přiletí po dopadu, už bude jenom opakovat to, co dělala ta před ní. Získáváme tak nerovnosti

$$\frac{2\sqrt{2}\,mv}{Mg} < T < \frac{4\sqrt{2}\,mv}{Mg}\,,$$

které upravíme na

$$\frac{2\sqrt{2}\,mv}{Tg} < M < \frac{4\sqrt{2}\,mv}{Tg}\,.$$

Číselně $720\,\mathrm{kg} < M < 1440\,\mathrm{kg}$. Zpětným dosazením do výrazu pro α vidíme, že oba dva členy jsou řádu 10^{-3} radiánu, díky čemuž je v tomto oboru hmotností naše aproximace korektní.

Výsledek, který jsme obdrželi, není nijak slavný. Rozmezí je široké a my se můžeme jen dohadovat, zda se skutečná mezní hmotnost bude blížit spíš dolní nebo horní hranici. Pokud prodloužíme naši aproximaci i tam, kde už prokazatelně nemá co dělat, tedy nahradíme skutečný moment tíhové síly konstantou $-Mga/2$ i pro další střely, vidíme, že přírůstek natočení $\Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, kde α_n je poloha krychle v okamžiku příletu střely, závisí pouze na počáteční úhlové rychlosti krychle a ta je s rostoucím n menší a menší, přilétají-li střely až za kulminací. V reálném případě bude tedy závislost α_n na n zprvu konkávní a pro hmotnosti blízké 720 kg se krychle dostane tak vysoko, že snížení momentu tíhové síly vlivem natočení tento efekt převáží, závislost se změní na konvexní a krychle přepadne. Numerické řešení (např. v programu Famulus) ukazuje, že skutečná mez leží okolo 740 kg.

Někteří z vás řešili tuto úlohu pomocí zákona zachování energie. To je bohužel špatně. Pokud totiž krychle stačí dopadnout dříve, než ji zasáhne další střela, veškerou získanou energii ztratí a začíná zase od nuly. Při pružné i při nepružné srážce se navíc nepředá krychli celá kinetická energie střely.

Závěrem ještě odpověď dvěma či třem řešitelům, kteří se pozastavili nad parametry zbraně. Ptal jsem se na to, prý existuje letecký kanón GAU 8 s kadencí 70 ran za sekundu nebo protiraketový systém Phalanx s šesti hlavněmi v jednom svazku a 100 ranami za sekundu.

Dalibor Šmíd

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.