12. ročník, úloha III . 4 ... drtivý dopad *(4 body; průměr ?; řešilo 25 studentů)*

Z „nekonečné“ vzdálenosti se k Zemi blíží meteorit počáteční rychlostí v_0. Vzdálenost meteoritu od přímky, která je rovnoběžná s vektorem rychlosti v_0 a prochází středem Země, je na začátku rovna a. Určete, jaký vztah musí platit mezi v_0 a a, aby meteorit nezasáhl Zemi.

Úlohu řešme v soustavě spojené se Zemí (v této soustavě byla úloha rovněž zadána). Neuvažujeme-li působení Měsíce, Slunce a dalších těles sluneční soustavy, potom na meteorit působí pouze gravitační síla Země. Silové působení meteoritu na Zemi lze zanedbat, neboť jeho hmotnost je vzhledem k hmotnosti Země nepatrná.

Gravitační pole Země je polem centrálním. Pohyb meteoritu bude tedy pohybem rovinným a plošná rychlost meteoritu bude během pohybu konstantní (2. Keplerův zákon). Předchozí tvrzení jsou důsledkem zákona zachování momentu hybnosti, který platí v každém centrálním poli (centrální síla má vůči centru pole nulový moment). Gravitační pole je konzervativní. Pro jeho popis lze tedy užít potenciální energii, která je dána vztahem $-\varkappa mM/r$. Z konstantnosti plošné rychlosti a ze zákona zachování mechanické energie je již možné určit, na jakou minimální vzdálenost se meteorit přiblíží k Zemi.

Označme M hmotnost Země, m hmotnost meteoritu a r vzdálenost meteoritu od středu Země. Rychlost meteoritu je výhodné rozložit do dvou směrů: do směru radiálního a do směru k němu kolmému. Velikost radiální složky označme v_r a velikost složky k ní kolmé v_φ (pokud bychom použili polární souřadnice, pak by platilo $v_r = \mathrm{d}r/\,\mathrm{d}t$ a $v_\varphi = r\mathrm{d}\varphi/\,\mathrm{d}t$). Pro velikost rychlosti meteoritu v potom platí vztah $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$. Plošnou rychlost w meteoritu můžeme vyjádřit jako $\frac{1}{2} r v_\varphi$. Ze zadaných údajů vyplývá, že $w = \frac{1}{2} a v_0$. Platí tedy

$$a v_0 = r v_\varphi \quad \Rightarrow \quad v_\varphi^2 = v_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 .$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne následující rovnost

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left[v_r^2 + v_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] - \frac{\varkappa m M}{r} .$$

Vyjádříme-li z této rovnice v_r^2, potom dostaneme vztah

$$v_r^2 = v_0^2 \left[1 + \frac{2\varkappa M}{a v_0^2} \frac{a}{r} - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] .$$

V minimální vzdálenosti r_m meteoritu od středu Země platí, že $v_r = 0$ ($\mathrm{d}r/\,\mathrm{d}t = 0$). Minimální vzdálenost r_m tedy splňuje následující rovnici

$$\frac{a}{r_m} = \frac{\varkappa M}{a v_0^2} + \sqrt{1 + \frac{\varkappa^2 M^2}{a^2 v_0^4}} .$$

Vzdálenost r_m je skutečně minimální, neboť pro $a/r > a/r_m$ vychází $v_r^2 < 0$. Aby meteorit nezasáhl Zemi, musí platit, že $r_m > R$, kde R je minimální možná vzdálenost meteoritu, při které ještě nedojde k zasažení Země. Dosazením za r_m a úpravami předcházející nerovnosti získáme výslednou nerovnost mezi a a v_0

$$a > R \sqrt{1 + \frac{2\varkappa M}{v_0^2 R}} .$$

Jelikož již ve výšce 200 km nad povrchem Země obíhají družice, lze za hodnotu R zvolit poloměr Země, tedy $R = 6\,400\,\mathrm{km}$.

Použitelnost výsledku závisí na tom, v jaké vzdálenosti od Země jsou udány počáteční hodnoty v_0 a a. Pokud se jedná o vzdálenosti, které lze ve srovnání s R považovat za „nekonečné“ a ve kterých je gravitační síla Slunce kompenzována setrvačnou silou (soustava spojená se Zemí je neinerciální), potom za předpokladu, že se meteorit výrazně nepřiblíží k Měsíci, lze uvedenou nerovnost považovat za reálný výsledek. Gravitační síla Slunce je kompenzována setrvačnou silou zhruba do vzdáleností přibližně 1 000 000 km od Země.

Podobně lze určit minimální popř. maximální vzdálenost tělesa od centra pole i v jiných případech, kdy potenciální energie působících sil a plošná rychlost (moment hybnosti) tělesa jsou funkcemi pouze vzdálenosti r. Výhodou tohoto postupu je, že není třeba znát trajektorii pohybujícího se tělesa.

Karel Kolář

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.