

12. ročník, úloha VI. 1 ... plyn v láhvi (3 body; průměr ?; řešilo 38 studentů)

Uzavřená nádoba obsahující ideální plyn se pohybuje rychlostí v . Nádoba se náhle zastaví a veškerá kinetická energie plynu se změní v teplo. Zanedbejte teplo předané stěnám a spočítejte, o kolik se zvětší druhá mocnina střední kvadratické rychlosti molekul plynu, je-li plyn

- a) jednoatomový,
b) dvouatomový.

Zdůvodněte rozdílné výsledky v případech a) a b).

Střední kvadratická rychlost je definována jako odmocnina ze střední hodnoty kvadrátu rychlosti, lze pro ni odvodit následující vztah

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (1)$$

kde k je Boltzmannova konstanta ($k \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$), m_0 hmotnost molekuly a T termodynamická teplota.

Jedna molekula plynu má při teplotě T střední kvadratickou energii

$$U = \frac{i}{2} kT, \quad (2)$$

kde i je počet stupňů volnosti. Pro jednoatomové molekuly (He, Ne, ...) je $i = 3$ (k popisu hmotného bodu jsou třeba tři nezávislé souřadnice), pro dvouatomové molekuly (H_2 , N_2 , O_2 , ...) je $i = 5$ (3 a dvě osy rotace, třetí osa se „nepočítá“ — energie rotace kolem osy symetrie je zanedbatelná). Z (2) dostáváme pro $k\Delta T$ vztah

$$k\Delta T = \frac{2\Delta U}{i}$$

a podobně z (1) dostaneme

$$k\Delta T = \frac{m_0}{3} \Delta(v_k^2).$$

Srovnáním těchto dvou vztahů získáme pro $\Delta(v_k^2) = v_{k2}^2 - v_{k1}^2$, výsledek

$$\Delta(v_k^2) = \frac{6\Delta U}{im_0}.$$

Změna vnitřní energie ΔU (přepočtená na jednu molekulu) je rovna $\frac{1}{2}m_0v^2$ a tedy

$$\Delta(v_k^2) = \frac{3}{i} v^2.$$

Správná odpověď je, že střední kvadratická rychlost se změní v případě a) o v^2 , v případě b) o $\frac{3}{5}v^2$. Rozdílnost výsledku je způsobena tím, že v případě b) se dodaná energie spotřebovává nejen na změnu translační energie molekuly, ale i na změnu rotační energie.

Několik poznámek k došlým řešením:

- Častou chybou byl zápis zákona zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{2}m_0v_{k1}^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v_k^2,$$

či podobném. Tento vztah je pro více atomů v molekule *chybný*, protože v_k charakterizuje pouze pohyb posuvný (translaci) a případnou rotaci molekuly nebere v úvahu. Z tohoto vztahu vychází $\Delta v_k^2 = v^2$ pro libovolně složitou molekulu.

- Pár vztahů které vám příště mohou usnadnit upravování vzorečků. Boltzmannova, molární plynová a Avogadrova konstanta jsou svázány vztahem

$$kN_A = R.$$

Budeme-li uvažovat veličinu C_V , což je molární tepelná kapacita při stálém objemu ($[C_V] = \text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$), která je svázána s měrnou tepelnou kapacitou c_V ($[c_V] = \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) vztahem $c_V M_m = C_V$, pak pro ideální plyn platí

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = R + C_V.$$

Jan Prokleška