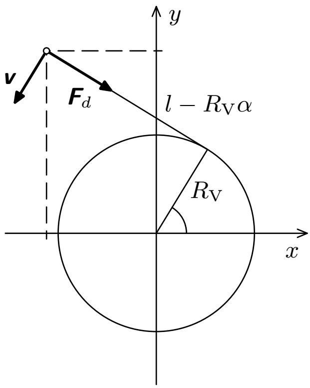
13. ročník, úloha I . 1 ... *trhání nitě* *(4 body; průměr ?; řešilo 121 studentů)*

Mějme pevně upevněný válec o poloměru R_V umístěný ve vakuu mimo jakékoliv silové pole. K tomuto válci připevníme (např. přilepíme) jeden konec niti, která má mez pevnosti v tahu σ_p, poloměr r a délku l, na jejímž druhém konci je upevněna olověná kulička o hmotnosti m. Nit napneme a kuličce udělíme rychlost v_0, jejíž směr bude kolmý na napnutou nit a na osu válce. Nit se začne na válec namotávat. Určete, v jaké vzdálenosti od válce se kulička utrhne a jaká bude v tomto okamžiku její rychlost.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $v_0 = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $m = 2\,\mathrm{kg}$, $r = 0{,}2\,\mathrm{mm}$, $\sigma_p = 160\,\mathrm{MPa}$, $R_V = 5\,\mathrm{cm}$, $l = 2\,\mathrm{m}$.



Obr. 1

Nejdříve si musíme uvědomit, jak se kulička bude chovat. Nejprve se bude pohybovat po kružnici, dokud provázek nebude mít směr tečny válce. Poté začne navíjení provázku na válec. Provázek na kuličku bude působit dostředivou silou o velikosti $F_d = mv^2/l_1$, kde l_1 je délka nenavinuté části provázku a v je jeho okamžitá rychlost. Provázek se přetrhne, až na něj bude působit tahová síla o velikosti $F_{\max} = S\sigma_p = \pi r^2\sigma_p$. Při přetržení tedy budou obě síly v rovnováze, bude tedy platit

$$\pi r^2\sigma_p = \frac{mv^2}{l_1}\,, \qquad l_1 = \frac{mv^2}{\pi r^2\sigma_p}\,.$$

Abychom zjistili, jak se mění délka provázku, musíme zjistit, jak se mění velikost rychlosti kuličky. Zde nastane problém, jaké zákony zachování můžeme použít. Zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti použít nelze. Budeme-li totiž na válec působit silou, která bude zároveň vyvolávat moment síly, nezačne se válec pohybovat,neboť je upevněný. Nelze u něj tedy určit hybnost ani moment hybnosti. Zákon zachování mechanické energie však platit bude. Kulička se nenachází v žádném silovém poli, její potenciální energie se nemění, a protože se nemění ani celková energie válce, zůstává kinetická energie kuličky konstantní. Toto lze také ukázat tím, že dostředivá síla působící na kuličku nekoná žádnou práci. Vykonaná práce bude $W = \int \boldsymbol{F}_d \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Zaveďme souřadnou soustavu, která má počátek ve středu válce. Je zřejmé, že provázek bude stále napnutý, proto můžeme polohový vektor kuličky vyjádřit v závislosti na úhlu α takto

$$\boldsymbol{r} = (R_V\cos\alpha - (l - R_V\alpha)\sin\alpha, R_V\sin\alpha + (l - R_V\alpha)\cos\alpha)\,.$$

V této soustavě vyjádříme vektor dostředivé síly takto

$$\boldsymbol{F}_d = (F\sin\alpha, -F\cos\alpha)\,.$$

Diferencováním polohového vektoru získáme

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = ((R_V\alpha - l)\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha, (R_V\alpha - l)\sin\alpha\ \mathrm{d}\alpha)\,.$$

Skalární součin $\boldsymbol{F}_d{\cdot}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$, tedy $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je kolmé na $\boldsymbol{F}_d$. Vykonaná práce tedy bude nulová. Kinetická energie kuličky se nemění, bude platit $v = v_0$. Délka provázku při přetržení bude

$$l_1 = \frac{v_0^2 m}{\pi r^2\sigma_p} \doteq 10\,\mathrm{cm}\,.$$

Protože hledáme vzdálenost kuličky od válce, musíme si uvědomit, jak tato vzdálenost závisí na délce provázku. Budeme uvažovat že kulička se stále pohybuje v rovině kolmé na osu válce. Pak snadno z Pythagorovy věty určíme vzdálenost kuličky od válce

$$d = \sqrt{R_V^2 + l_1^2} - R_V \doteq 6{,}1\,\mathrm{cm}\,.$$

Na závěr lze dodat, že počáteční délka provázku je větší než délka, při které se kulička utrhne. Provázek se tedy přetrhne až po započetí navíjení.

Karel Honzl

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.