13. ročník, úloha II . 2 ... *kyvadélko na vozíčku* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 53 studentů)*

Mějme matematické kyvadlo o hmotnosti m a délce l umístěné na vozíčku. Vozíček má hmotnost M a je volně (bez odporových sil) pohyblivý po rovině. Určete periodu malých kmitů kyvadla.

Vozíček i kyvadlo se budou pohybovat v rovině. V této rovině tedy zvolme kartézské souřadnice: osu x vodorovně orientovanou směrem doprava a osu y svisle orientovanou proti směru tíhového zrychlení. Polohu kyvadla vůči vozíčku popišme úhlem φ, což je orientovaný úhel od záporného směru osy y ke kyvadlu. Úhlovou rychlost kyvadla označme $\omega = \mathrm{d}\varphi / \mathrm{d}t$ a úhlové zrychlení $\varepsilon = \mathrm{d}^2\varphi / \mathrm{d}t^2$. Pohyb kyvadla bude výhodné řešit v soustavě spojené s vozíčkem. To je však neinerciální soustava, a proto musíme nejdříve určit její zrychlení a vůči inerciálním systémům.

Výslednice vnějších sil působících na vozíček s kyvadlem bude ve směru osy x nulová. Z první impulzové věty tedy plyne, že zrychlení hmotného středu soustavy kyvadlo-vozíček ve směru osy x bude nulové

$$Ma + m\left(a + l\varepsilon\cos\varphi - \omega^2 l \sin\varphi\right) = 0,$$

kde a je složka zrychlení vozíčku ve směru osy x. Výraz $l\varepsilon\cos\varphi - \omega^2 l\sin\varphi$ udává složku ve směru osy x zrychlení hmotného bodu kyvadla v soustavě spojené s vozíčkem. Člen s ε popisuje tečné zrychlení a člen s ω zrychlení dostředivé. Zrychlení vozíčku ve směru osy y je nulové.

Pohybová rovnice kyvadla v soustavě spojené s vozíčkem má tedy následující tvar (druhá impulzová věta)

$$ml^2\varepsilon = -mgl\sin\varphi - mal\cos\varphi.$$

Po dosazení za a dostaneme

$$\varepsilon = -\frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{m\left(\varepsilon\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi\right)\cos\varphi}{M+m}.$$

Pro malé výchylky platí: $\cos\varphi \approx 1$ a $\sin\varphi \approx \varphi$. Pohybová rovnice kyvadla se nám potom zjednoduší

$$\varepsilon = -\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}\varphi - \frac{m}{M}\omega^2\varphi.$$

Bude-li ω pro malé kmity malé, potom lze člen obsahující úhlovou rychlost zanedbat. Výsledná rovnice je pak formálně shodná s pohybovou rovnicí harmonického oscilátoru. Řešení této rovnice splňují podmínku, že pro malé amplitudy kmitů jsou i malé amplitudy úhlové rychlosti a zanedbání členu s ω v pohybové rovnici tak bylo oprávněné. Doba kmitu T malých kmitů kyvadla je tedy dána vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(1 + m/M)}}.$$

Doba kmitu tohoto kyvadla je tedy vždy menší než doba kmitu matematického kyvadla zavěšeného na pevném závěsu v inerciální soustavě. Je to způsobeno tím, že se kyvadlo a vozík (tedy i závěs) vždy pohybují proti sobě. Upevníme-li vozíček k zemi, potom $M \to \infty$, neboť nyní je volně pohyblivým vozíčkem celá země, a dostáváme známý vzorec pro matematické kyvadlo. Je-li $m \gg M$, potom je doba kmitu kyvadla podstatně menší než doba kmitu kyvadla pro případ nepohyblivého vozíčku. To je celkem pochopitelné, neboť v tomto případě kyvadlo v inerciálním systému téměř stojí (neuvažujeme-li rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu soustavy kyvadlo–vozíček) a kolem něho kmitá vozíček. Protože je hmotnost vozíčku M podstatně menší než hmotnost kyvadla m, stačí velmi malá změna potenciální energie kyvadla k velmi rychlému pohybu vozíčku.

Tento problém lze řešit dvěma postupy. Jedním postupem jsou pohybové rovnice a druhým zákony zachování (hybnosti ve vodorovném směru a energie). V obou případech se využije, že pro malé kmity se matematické kyvadlo na vozíčku chová jako harmonický oscilátor. V případě, že pohyb kyvadla neřešíme v soustavě spojené s vozíčkem ale ve vnější inerciální soustavě, pak je nutné započítat vliv pohybu vozíčku (závěsu kyvadla) na dobu kmitu kyvadla, na což mnozí řešitelé zapomněli.

Karel Kolář

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.