

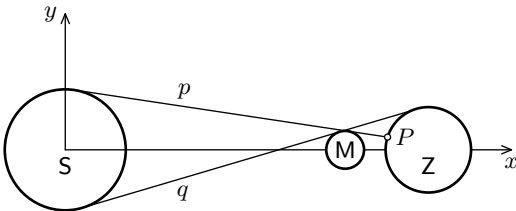
13. ročník, úloha IV. 4 ... zase to zatmění (5 bodů; průměr ?; řešilo 64 studentů)

Vaším úkolem je spočítat maximální možnou šířku pásu úplného i částečného zatmění Slunce. Je úplné zatmění pozorovatelné vždy, když se Měsíc dostane na spojnici Slunce a Země? Pro jednoduchost uvažujte, že se všechna tři tělesa pohybují v téže rovině (ekliptice).

K výpočtu použijte následujících dat

- vzdálenost Země od Slunce r_Z kolísá mezi 147 093 860 km a 152 101 870 km
- vzdálenost Měsíce od Země r_M kolísá mezi 356 410 km a 406 740 km
- poloměr Slunce je $R_S = 695\,990$ km
- poloměr Země je $R_Z = 6\,378$ km
- poloměr Měsíce je $R_M = 1\,738$ km

Situaci budeme řešit v rovině kolmé na ekliptiku a procházející středy Slunce, Země a Měsíce. Zavedeme soustavu souřadnou dle obrázku 1.



Obr. 1

Situace bude symetrická podle osy x , dále budeme řešit jen v polorovině $y > 0$. Zajímá nás bod P , protože dvojnásobek jeho y -ové souřadnice bude šířka stínu. Rovnice přímky p určující hranici oblasti úplného stínu má tvar

$$y = \frac{R_M - R_S}{r_Z - r_M} x + R_S$$

(získáme ji z obecné rovnice přímky $y = ax + b$ a dvou známých bodů $[0, R_S]$ a $[r_Z - r_M, R_M]$ - zanedbáváme, že spojnice tečného bodu a středu tělesa není kolmá na osu x , což je vzhledem k úhlu, který svírá přímka p s osou x (desetiny stupně) oprávněné zanedbání).

Pro $x = r_Z - R_Z$ dostaneme

$$y = \frac{R_M - R_S}{r_Z - r_M} (r_Z - R_Z) + R_S. \quad (1)$$

Protože je $R_M - R_S < 0$, tak pro maximální y musí být r_Z maximální a r_M minimální, číselně je šířka stínu $2y = 273$ km (můžeme si tedy v této chvíli dovolit zanedbat zakřivení Země).

Pro částečné zatmění dostaneme analogicky rovnici přímky q

$$y = \frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M} x - R_S.$$

Pokud bychom dosadili $x = r_Z - R_Z$ dostaneme maximální hodnotu y přibližně 3600 km, již nelze zanedbat zakřivení Země.

Budeme tedy hledat průnik q s kružnicí $(x - R_Z)^2 + y^2 = R_Z^2$, která popisuje řez povrchem Země v naší soustavě souřadné. Po dosazení za y dostaneme kvadratickou rovnici

$$\left(1 + \left(\frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M}\right)^2\right) x^2 - 2\left(r_Z + R_S \frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M}\right) x + r_Z^2 + R_S^2 - R_Z^2 = 0.$$

Po vyřešení (vezmeme menší z kořenů) dostaneme x_S , což je x -ová souřadnice průniku. Pak hledaná šířka částečného zatmění na zemské sféře je $2R_Z \arccos(r_Z - x_P)/R_Z \doteq 7764$ km.

K otázce existence úplného zatmění. Při pohledu na (1) zjistíme, že y nabývá minima pro r_M minimální a r_Z maximální, po dosažení $y = -156$ km se p a p_{sym} protnou mezi Měsícem a Zemí a tedy úplné zatmění Slunce na Zemi vidět nebude.

Jan Prokleška