Zadání I. série

Termín odeslání: 23. října 2000

Milí přátelé!

Vítáme vás v XIV. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Podrobnější informace o semináři najdete v přiloženém letáku, zde uvádíme jen několik důležitých věcí.

S první sérií nám prosím pošlete na zvláštním papíře vaše jméno, příjmení, datum narození, adresu pro korespondenci, školu, třídu, kategorii (kat. 1., 2., 3. nebo 4. ročníků) a email (máte-li). Řešení každé úlohy pište na **zvláštní papír** a **všechny papíry podepište**.

Není třeba posílat řešení všech úloh, řešitelé, kteří spočítají vše, jsou spíše výjimkou.

U experimentální úlohy nezapomeňte na to, že experiment je třeba nejen navrhnout, ale i provést, naměřené hodnoty zpracovat, spočítat z nich výsledek a provést diskuzi chyb. Odměnou vám bude vyšší počet bodů, jímž je experimentální úloha hodnocena.

Na vaše řešení se již dnes těší

Vaši organizátoři

Úloha I . 1 ... *levitace*

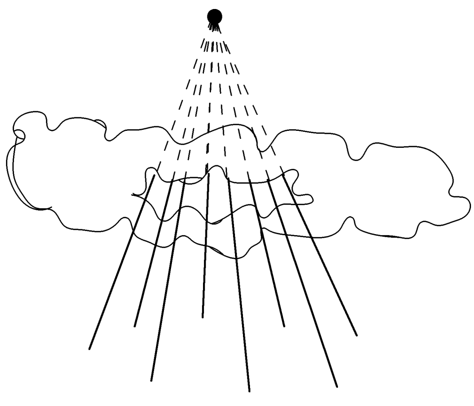
Představme si, že elektrický náboj zeměkoule začne najednou z ničeho nic růst. To znamená, že i vy se začnete nabíjet. Může to dojít tak daleko, že coulombovská síla vyrovná gravitační a vy se odlepíte od Země. Vysvětlete, proč není možné, aby se různě velká tělesa stejné hustoty odlepila ve stejný okamžik. Pro zjednodušení uvažujte, že všechna tělesa mají tvar koule.

Úloha I . 2 ... *kondenzátor v kapalině*

Do kapalného dielektrika jsou svisle ponořeny dvě čtvercové paralelní vodivé desky o straně a. Nejsou-li desky nabity, vystoupí hladina mezi deskami do výšky h_0 (měřeno od dolního okraje desek). O jakou vzdálenost Δh se zvýší hladina kapaliny mezi deskami, nabijeme-li desky na napětí U? Permitivita kapaliny je ε, hustota ρ a vzdálenost desek je d ($d \ll a$).

Úloha I . 3 ... *sluneční paradox*

Hlavně večer a ráno můžeme někdy pozorovat sluneční paprsky jdoucí skrz mezery v mracích. Vidíme, že se tyto paprsky rozbíhají. Kdybychom si v jejich myšleném průsečíku představili Slunce, vyšlo by nám, že je několikrát (2–5) dále než mraky, tzn. řádově deset kilometrů nad Zemí. Tak proč nám všichni tvrdí, že Slunce je od Země 150 mil. km?



Obr. 1

Úloha I . 4 ... *ponorka*

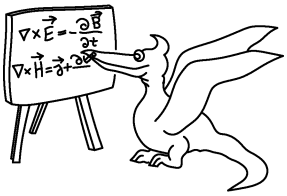
Mějme širokou otevřenou válcovou nádobu o výšce h, průřezu S a hmotnosti m. Položíme ji na hladinu a ona zaujme rovnovážnou polohu. Poté uprostřed dna uděláme malou dírku o průřezu $S^* \ll S$. Do nádoby začne vtékat voda, vaším úkolem je určit, za jak dlouho se ponoří.

Úloha I . P ... *jedna paní povídala*

Jeden krátkozraký kamarád mi říkal, že když si z prstů před okem utvoří malý otvor, tak vidí věci kolem sebe ostřeji než normálně. Je na tom něco pravdy nebo si vymýšlí? Svůj názor fyzikálně zdůvodněte.

Úloha I . Exp ... *natahování špaget*

Určete Youngův modul pružnosti v tahu uvařených špaget.



Seriál na pokračování

Kapitola 1: Klasická mechanika

Úvod

Tento rok v seriálu na pokračování zabrousíme do jednoho z nejstarších oborů fyziky. Budeme se zabývat klasickou mechanikou, jejíž dnešní podoba je z většiny dílem Isaaca Newtona. Newton dosavadní fyzikální pozorování shrnul do ucelené matematické teorie, jeho mechanika se stala teoretickým základem novodobé fyziky.

Základní pojmy

V tomto díle se budeme zabývat mechanikou *hmotného bodu*, čímž myslíme těleso, které má nekonečně malé rozměry, ale nenulovou hmotnost. Jedná se o idealizaci reálných těles, kterou můžeme použít v případě, když zkoumané těleso je velmi malé, nebo nám nejde o jeho rotaci či deformaci, ale jen o jeho pohyb podél nějaké křivky. K určení polohy hmotného bodu používáme *polohový vektor,* což je spojnice počátku soustavy souřadnic s popisovaným bodem, budeme ho značit $\boldsymbol{r}$[1]). Tento vektor často s výhodou rozkládáme do složek $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$. Jde-li o pohyb po přímce, stačí nám k popisu polohy pouze jediná souřadnice, poloha v rovině je daná dvěma souřadnicemi. Při svém pohybu hmotný bod opisuje křivku, které říkáme *trajektorie*, délka trajektorie mezi dvěma body je pak *dráha,* kterou hmotný bod urazil.

Rychlost a zrychlení

Rychlost je veličina, která určuje, jak rychle se mění poloha hmotného bodu, resp. jeho polohový vektor. *Průměrnou rychlostí* v časovém intervalu (t_1, t_2) nazýváme podíl

$$\boldsymbol{v}_p = \frac{\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

je to tedy posunutí dělené časem. Abychom zjistili okamžitou rychlost v čase t, musíme zjistit průměrnou rychlost na intervalu $(t, t + \Delta t)$, kde Δt zmenšujeme k nule.

Příklad 1: Hmotný bod se pohybuje po přímce a jeho polohu udává souřadnice $x = kt^3$, kde k je konstanta (její jednotka je m.s^{-3}). Průměrná rychlost na intervalu $(t, t + \Delta t)$ je

$$v_p = \frac{k(t+\Delta t)^3 - kt^3}{\Delta t} = \frac{k(t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3) - kt^3}{\Delta t} = 3kt^2 + 3kt\Delta t + k(\Delta t)^2 \,.$$

Zmenšujeme-li Δt k nule, dostáváme okamžitou rychlost $v = 3kt^2$.

Proces, kterým jsme z funkce $x = kt^3$ dostali funkci $v = 3kt^2$ se nazývá derivování, funkce $v(t)$ je derivací funkce $x(t)$ podle času, což značíme $v = \dot{x}$ [2]). V dalším textu budeme o derivacích potřebovat tyto poznatky:

- derivace konstantní funkce je nula (nulová funkce)
- derivace součtu dvou funkcí je součet derivací těchto funkcí, tedy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f+g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \dot{f} + \dot{g}$
- konstantu lze vytknout před derivaci, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f$
- funkce $y = t^r$, kde $r \in R$ má derivaci $\dot{y} = rt^{r-1}$, obecněji $y = (at+b)^r$ má derivaci $\dot{y} = ra(at+b)^{r-1}$

[1]) Vektory značíme tučně, případně šipkou nad písmenem v ručně psaném textu.

[2]) Takto se značí derivace podle času, obecně se derivace funkce $y(x)$ podle x značí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)$ nebo zkráceně $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Zrychlení je derivace rychlosti podle času, $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$ [3]). Zrychlení tedy udává, jak rychle se mění rychlost.

Příklad 2: Hmotný bod při pohybu po přímce zpomaloval se zrychlením $a = -\sqrt{k(t_1 - t)}$, a v čase t_1 zastavil. Chceme určit jeho počáteční rychlost. K tomu budeme hledat funkci $v(t)$ tak, aby $\dot{v} = a$. Vzhledem k tomu, že platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t_1 - t)^{3/2} = -\frac{3}{2}(t_1 - t)^{1/2}$, vyhovuje funkce $v = \frac{2}{3}\sqrt{k(t_1 - t)^3} + c$ podmínce $\dot{v} = a$. Konstantu c určíme tak, že za t dosadíme t_1, pak dostaneme $v(t_1) = c$, a tedy $c = 0$. Hledaná počáteční rychlost je $v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{kt_1^3}$.

Pohybová rovnice

Newtonova teorie je založena na třech zákonech. Asi nejdůležitější je druhý, který říká, že celková síla, která působí na hmotný bod je rovna časové derivaci jeho hybnosti, $\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}}$. *Hybnost* je definovaná jako $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, a protože m je konstantní, platí $\dot{\boldsymbol{p}} = m\dot{\boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{a}$, můžeme tedy psát $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Proto je zrychlení tak důležitá veličina, známe-li totiž sílu, která na těleso působí, snadno spočítáme jeho zrychlení. Působící sílu vyjádříme jako funkci polohy, rychlosti a času, po dosazení do 2. Newtonova zákona dostaneme pohybovou rovnici

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{a}$$

kde $\ddot{\boldsymbol{r}}$ značí druhou derivaci (derivaci derivace) $\boldsymbol{r}$, tedy zrychlení. Řešením pohybové rovnice získáme závislost polohy hmotného bodu na čase.

Příklad 3: Volný pád. Těleso je z výšky h vrženo rychlostí v_0 k zemi. Působí na něj konstantní síla $F = -mg$. Pro popis polohy nám stačí y-ová souřadnice, počátek volíme na povrchu Země. Pohybová rovnice je tedy $-mg = ma = m\ddot{y}$. Nejprve budeme hledat rychlost $v(t) = \dot{y}(t)$. Derivace této funkce musí být $-g$, proto $v = -gt + c$, kde konstanta c je rovna počáteční rychlosti $-v_0$, tedy $v = -gt - v_0$. Podobně najdeme $y(t)$. Jeho derivace je $v(t)$, odtud $y = -gt^2/2 - v_0 t + h$. Z tohoto vztahu lze již snadno spočítat např. dobu pádu či rychlost dopadu.

Druhy sil

Gravitační síla: Na základě Keplerových pozorování odvodil[4]) Newton, že planety jsou ke Slunci přitahovány silou, která je přímo úměrná jejich hmotnosti a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti. Zobecnění tohoto poznatku — Newtonův gravitační zákon — tvrdí, že každé dva hmotné body se přitahují silou o velikosti

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad G = 6,672.10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}.$$

Tento vztah platí nejen pro hmotné body, ale i pro koule se sféricky symetricky rozloženou hmotností[5]), za vzdálenost r pak bereme vzdálenost středů. Tělesa na povrchu Země jsou proto přitahována silou $F = m(GM_Z/R_Z^2) = mg$.

Síly pružnosti: Další silou s širokým využitím je síla pružnosti, která se dá vyjádřit jako $F = -kx$, kde $k > 0$ je konstanta pružnosti závisející na vlastnostech pružné soustavy, x je výchylka z rovnovážné polohy. Může se jednat buď přímo o pružinu nebo například o železnou tyč. U té ale bude konstanta k výrazně větší, lze jí z Hookova zákona spočítat jako $k = SE/l$, kde S je průžez tyče, l její délka a E Youngův modul pružnosti materiálu. Většinou není závislost síly na výchylce přesně lineární, přesto s výhodou používáme vztah $F = -kx$ jako dobrou aproximaci.

Třecí síly: Je nutné rozlišovat dva druhy třecích sil — statickou a dynamickou. Statická třecí síla mezi dvěma pevnými povrchy brání jejich vzájemnému pohybu (její velikost a směr jsou tomu přizpůsobeny). Maximální velikost této síly je $F = f_s F_n$, kde F_n je síla, kterou jsou povrchy přitlačovány k sobě v normálovém směru, f_s je statický koeficient tření závisející na materiálech. Působí-li na povrchy v tečném směru větší síla než $f_s F_n$, začnou po sobě klouzat, jejich pohyb je ale bržděn dynamickou třecí silou. Její směr je opačný než směr pohybu povrchů a pozoruhodné

[3]) Vektor derivujeme tak, že zderivujeme každou jeho složku. Výslekdem je tedy opět vektor.

[4]) V některém z příštích dílů si ukážeme jak.

[5]) Tzn. že hustota závisí pouze na vzdálenosti od středu, což splňuje většina vesmírných těles.

je, že její velikost téměř nezávisí na rychlosti pohybu povrchů, je rovna $F = f_d F_n$, f_d je dynamický koeficient tření (také se používá termín koeficient smykového tření), pro dané materiály je dynamický koeficient menší než statický, proto je také brždění automobilu učinější, když kola nesmýkají.

Odporové síly: Na tělesa pohybující se v tekutém prostředí působí proti směru rychlosti odporové síly. Pro malé rychlosti lze přibližně tvrdit, že odporová síla je přímo úměrná rychlosti, pro kouli o poloměru r pohybující se pomalu v tekutině o viskozitě η odvodil Stokes vztah $F = 6\pi r\eta v$. Pro vyšší rychlosti, kdy začíná být proudění turbulentní odvodil Newton vztah $F = \frac{1}{2}CS\varrho v^2$, kde S je plocha kolmého průřezu tělesa, ϱ hustota prostředí a C je bezrozměrný koeficient závisející na geometrii tělesa (pro kouli $C \approx 0,4$).

Oba vztahy však platí pouze přibližně. Přesný výpočet odporových sil je značně komplikovaný, jedná se stále o otevřený problém. Clayův matematický institut nedávno vypsal za důkaz existence a hladkosti řešení Navier-Stokesových rovnic odměnu $1,000,000! Právě tyto rovnice exaktně popisují proudění tekutin (od vody v jezeře, která obtéká vaši loďku, přes víno, co si lejete do skleničky, až po chování vzduchu, kterým poletují ptáci).

Úloha I.S ... *autíčka*

a) Autíčko o hmotnosti m se rozjíždí z klidu tak, že výkon P je konstantní. Určete závislost zrychlení, rychlosti a polohy na čase. Návod: znáte-li výkon, je jednoduché určit závislost kinetické energie autíčka na čase.

b) Autíčko jede při maximálním výkonu do kopce rychlostí $v_1 = 95$ km.h^{-1}. Ze stejného kopce dolů jede při plném výkonu rychlostí $v_2 = 162$ km.h^{-1}. Jak rychle pojede po rovině? Odporová síla je úměrná v^2.

Naše adresa:
FYKOS
Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8
http://www.mff.cuni.cz/news/fks

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením vnějších vztahů a propagace MFF UK, je organizován studenty MFF UK za podpory Ústavu teoretické fyziky MFF UK a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.