

15. ročník, úloha I. 2 ... válec s vodou (4 body; průměr ?; řešilo 101 studentů)

Mějme válcovou nádobu o poloměru podstavy R naplněnou vodou do výšky H . Do podstavy uděláme malou díрку o poloměru r . Za jak dlouho voda vyteče?

Na soustředění pro mezinárodní FO tuto úlohu uvidíte alespoň 4×.

Nejprve musíme určit podmínky, za jakých budeme úlohu řešit. Abychom byli schopni udělat alespoň nějakou rozumnou předpověď, musíme předpokládat, že dířka je opravdu malá, a proto se proudění v krátkých časových intervalech příliš neliší od ustáleného, takže můžeme použít Bernoulliho rovnici

$$p_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.}$$

Z této rovnice si vyjádříme závislost rychlosti poklesu hladiny na její výšce

$$v_R^2 = v_r^2 - 2gh,$$

kde v_R je rychlost poklesu hladiny a v_r je výtoková rychlost v otvoru. Potřebujeme zjistit, jak závisí v_R na v_r . Dle rovnice kontinuity jsou objemové průtoky otvorem a při hladině stejné, neboli

$$\pi r^2 v_r = \pi R^2 v_R.$$

Odtud $v_r = (R^2/r^2)v_R$, a proto

$$v_R = \sqrt{\frac{2gh}{R^4/r^4 - 1}}.$$

Teď už víme, jak závisí rychlost poklesu hladiny na výšce. Závislost výšky hladiny na čase můžeme získat dvěma způsoby. První způsob vychází ze srovnání vztahu pro rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu

$$v = \sqrt{2ah}$$

a předchozí rovnice, z čehož dostaneme

$$a = \frac{g}{R^4/r^4 - 1}.$$

Dále použijeme rovnici $h = \frac{1}{2}at^2$, neboli $t = \sqrt{2h/a}$. Odtud vychází, že

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1}.$$

První odmocnina pro malá r přechází v R^2/r^2 . Druhý způsob řešení je založen na přímém použití diferenciálního a integrálního počtu.

$$t = \int_0^h \frac{dh}{v_R} = \sqrt{\frac{R^4/r^4 - 1}{2g}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1}.$$

Tento vztah evidentně neplatí pro r blízké R , protože by se čas blížil k nule místo k času volného pádu $\sqrt{2h/g}$. Je to proto, že Bernoulliho rovnice platí jen ve stacionárním případě. Při výpočtu jsme také zanedbali nerovnoměrně rozložení rychlostí ve výstupním otvoru, které efektivně snižuje plochu otvoru.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.