# Zadání III. série

## Termín odeslání: 20. ledna 2003

## Milí řešitelé!

Konečně dostáváte do rukou autorská řešení první série Fykosu společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se dozvíte nejen, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmikoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovateli líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „**I**“ je uveden součet bodů za aktuální sérii, ve sloupci „**%**“ procentový zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Přejeme spoustu dobrých nápadů při řešení další série, nezapomeňte nám ji poslat včas.

***vaši organizátoři***

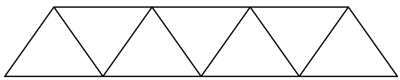
**Úloha III . 1 ... *vítr na dálnici***

V autoškole každého upozorňují na nebezpečí bočního větru při vjezdu ze závětří na otevřené prostranství. Zejména nebezpečné je to prý na dálnici při velké rychlosti.

Uvažujte konstatní rychlost bočního větru a spočtěte, jak se mění síla působící z boku v závislosti na rychlosti auta. Tvar auta předpokládejte takový, abyste úlohu dokázali vyřešit. Diskutujte vliv větru na následný pohyb vozidla.

**Úloha III . 2 ... *železniční most***

Chrabrý rudoarmějec vjel tankem na železniční most, jehož konstrukce, nad ním se tyčící, je schématicky znázorněna na obr. 1. Vaším úkolem je popsat, jak moc budou při přejezdu namáhány jednotlivé části mostu. Pokud jsou meze pevnosti všech tyčí v tahu stejné jako meze v tlaku, určete maximální hmotnost tanku, který po mostě může přejet. Můžete uvažovat, že tank je oproti mostu malý.



Obr. 1

**Úloha III . 3 ... *praktikum II***

Ve fyzikálním praktiku dostal organizátor FYKOSu za úkol pomocí tří měření zjistit napětí třech různých zdrojů.

K dispozici má jeden voltmetr následujících vlastností: Jeho systematická chyba je nulová. Náhodná chyba je charakterizována střední kvadratickou odchylkou $\sigma$ (tj. rozptyl je $\sigma^2$), která je nezávislá na velikosti měřeného napětí.

Poraďte organizátorovi, zda a popř. jak lze napětí změřit přesněji než změřením každého zdroje zvlášť. Za míru celkové přesnosti považujte součet rozptylu výsledných hodnot.

**Úloha III . 4 ... *rychlá smrt***

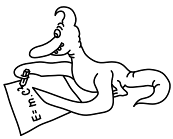
V modulu Apollo letí astronauti na Měsíc, skrz okno jim proletí meteorit a udělá v něm dírku o poloměru $r = 1\,\mathrm{mm}$. Jak se bude měnit teplota a tlak v kabině o objemu $V = 60\,\mathrm{m}^3$, pokud původní podmínky jsou $t = 20\,^\circ\mathrm{C}$ a normální tlak. Jako bonus se pokuste odhadnout, za jak dlouho začnou mít astronauti vážné problémy.

**Úloha III . P ... *velikost elementárních částic***

a) Elektrostatická energie rovnoměrně nabité koule je $E = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$. Pokud to dokážete, ověřte tento vztah výpočtem, jinak řešte rovnou úkol b).
b) Pomocí tohoto vztahu se pokuste ze znalosti klidové energie protonu a elektronu spočítat rozměr těchto částic.
c) Rozmyslete, proč je tento postup zcela nesmyslný. Pozn.: experimentálně je ověřeno, že rozměr elektronu je menší než $10^{-19}\,\mathrm{m}$.

**Úloha III . E ... *balónek***

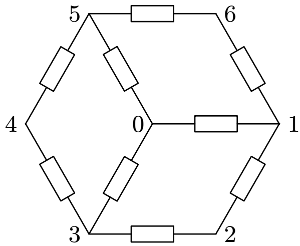
Změřte tlak vzduchu, který je při nafukování uvnitř balónku těsně před tím, než balónek praskne. Alespoň jednu metodu zrealizujte a několik dalších navrhněte. Nezapomeňte uvést typ použitých „balónků“.




# *Řešení I. série*

**Úloha I . 1 ... *odpory*** *(4 body; průměr 2,38; řešilo 61 studentů)*

*Pro síť na obr. 2 (všechny odpory jsou stejné, jejich velikost označme R) určete odpor mezi dvěma vrcholy šestiúhelníku (uvažte všechna možná zapojení).*




Obr. 2

Vzhľadom k tomu, že sieť je symetrická, máme 4 možnosti zapojenia: 1-2, 1-3, 1-4 a 2-4.

### *1. $R_{12}$ – odpor medzi vrcholmi 1-2*

Zo symetrie vyplýva, že body 0 a 5 majú rovnaký potenciál, a teda rezistorom $R_{05}$ nebude tiecť prúd. Preto môžeme $R_{05}$ odstrániť a odpor $R_{12}$ vypočítame ako paralelné zapojenie odporov $R$ a $R + R'$, kde

$$R' = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}} = \frac{4}{3}R\,.$$

Dostaneme výsledok

$$R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R'}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+\frac{4}{3}R}} = \frac{7}{10}R\,.$$

*2. $R_{13}$ – odpor medzi vrcholmi 1-3*

Tu je situácia podobná ako v prvom prípade. Rezistorom $R_{05}$ vďaka symetrii netečie prúd, a teda ho môžeme odstrániť. Odpor $R_{13}$ potom spočítame ako paralelné zapojenie odporov $2R$ a $R'$.

$$R_{13} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R'}} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}} = \frac{4}{5}R.$$

*3. $R_{14}$ – odpor medzi vrcholmi 1-4*

Opäť využijeme symetriu. Uzly 5 a 3 majú rovnaký potenciál, teda ich môžeme spojiť. Dostaneme tak zapojenie z dvoma paralelnými obvodmi, ktorých odpor ľahko spočítame.

$$R_{14} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}} + \frac{1}{2R}} = \frac{11}{10}R\ .$$

*4. $R_{24}$ - odpor medzi vrcholmi 2-4*

V tomto prípade je nulový potenciálový rozdiel medzi uzlami 0 a 3. Po odstránení rezistoru $R_{03}$ vypočítame odpor $R_{24}$ ako paralelné zapojenie odporov $2R$ a $2R + 1/(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R})$.

$$R_{24} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}}}} = \frac{6}{5}R\ .$$

Úloha sa samozrejme dala riešiť aj inými spôsobmi. Viacerí riešitelia využili transformáciu hviezdy na trojuholník a naopak, alebo riešili úlohu pomocou Kirchhoffových zákonov (tu však často dochádzalo k chybám, keď niekto rieši sústavu 10 rovníc o 10 neznámych, ľahko sa pomýli).

***Eva Skopalová***
eva@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . 2 ... Archimédes** *(4 body; průměr 3,06; řešilo 80 studentů)*

*Pokuste se bez použití rovnic a vzorců vyřešit následující dvě úlohy. Pozor, vaše řešení musí být i tak naprosto exaktní.*

a) *V nádobě s vodou plave kus ledu. Co se stane s hladinou, až led roztaje?*
b) *Na misky rovnoramenných vah jsou položena stejně těžká tělesa. Co se stane, když jednu misku ponoříme do vody?*

Dle Archimédova zákona zaujme část ledu ponořená ve vodě právě takový objem, aby se tíha ledu rovnala tíze vytlačené vody. Z toho plyne, že až led roztaje, zaujme vzniklá voda přesně tento objem. Hladina vody se tedy nezmění.

Na misku ponořenou ve vodě bude působit vztlaková síla rovná tíze vytlačené vody. Protože hustota vody je větší než hustota vzduchu, bude tato síla větší než vztlaková síla vzduchu, která na těleso působila před ponořením. Váhy se tedy vychýlí tak, že ponořená miska stoupne, a opět se stabilizují v poloze, kdy se bude miska dotýkat hladiny.

Nejčastější chybou bylo, že řešitelé nesprávně pochopili zadání a domnívali se, že ponoříme obě misky či celé váhy.

***Michael Komm***
michael@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . 3 ... hračka** *(4 body; průměr 2,24; řešilo 54 studentů)*

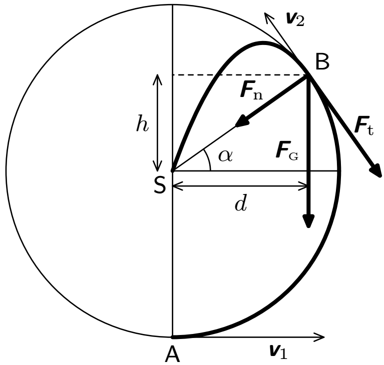
*Organizátor Fykosu dostal k narozeninám hračku, která je schématicky vyobrazena na obr.3. Hračka, která slouží také jako záložka, se skládá z malého cínového kalíšku spojeného provázkem délky l s cínovou kuličkou.*

*Poraďte organizátorovi, jakou rychlost má udělit kuličce, aby spadla do kalíšku. Uvažujte, že kalíšek je v klidu, je velmi malý při porovnání s délkou provázku a ztráty mechanické energie lze zanedbat.*

Kulička se bude zpočátku pohybovat po kružnici s poloměrem $l$ (délka provázku) a středem S (kalíšek). Dostředivá síla, kterou působí provázek na kuličku, má velikost

$$F_{do} = m\frac{v^2}{l} .$$

a působí ve směru provázku. Na kuličku dále působí síla tíhová, kterou můžeme rozložit na složku tečnou ($F_t = mg\cos\alpha$) a normálovou ($F_n = mg\sin\alpha$) k trajektorii. Provázek je napínán silou o velikosti $F = F_{do} - F_n$. Kulička se z kruhové trajektorie odchýlí v okamžiku, kdy provázek přestane být napínán, tedy $F = F_{do} - F_n = 0$, resp.



Obr. 3

$$mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{l} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v^2}{gl} . \qquad (1)$$

V tomto okamžiku bude kulička výš než kalíšek. Z bodu B se kulička pohybuje po trajektorii šikmého vrhu. Ze zákona zachování energie dostaneme vztah

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(h+l) ,$$
$$v_1^2 = 2g(h+l) + v_2^2$$

a ze vztahu (1) máme

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{v_2^2}{gl} \Rightarrow v_2^2 = gh .$$

Vztahy pro rychlost $v$ a úhel $\varphi$ tedy máme. Rychlost $v_2$ svírá se svislou osou úhel $\alpha$. Pro souřadnice šikmého vrhu platí vztahy

$$x: \quad d = v_2 t\sin\alpha ,$$
$$y: \quad 0 = h + v_2 t\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Z geometrie obrázku platí

$$l^2 = d^2 + h^2 , \quad \cos\alpha = \frac{d}{l} , \quad \sin\alpha = \frac{h}{l} .$$

Z rovnice pro $x$ si vyjádříme čas

$$t = \frac{ld}{v_2 h} .$$

Vše dosadíme do vztahu pro $y$ a dostaneme

$$0 = h + v_2 \frac{d}{l} \frac{ld}{v_2 h} - \frac{1}{2} g \frac{d^2 l^2}{g h^3} \ .$$

Dosazením za $d$ z Pythagorovy věty a vyjádřením $h$ dostaneme

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3} l \ .$$

Nyní dosazením do zákona zachování energie dostaneme

$$v_1 = \sqrt{3gh + 2gl} = \sqrt{gl(\sqrt{3} + 2)} \ .$$

***Adéla Jelínková***
adetka@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . 4 ... visící drát** *(4 body; průměr 2,84; řešilo 31 studentů)*

*Odhadněte rozdíl elektrických potenciálů mezi konci drátu délky $l$ visícího v gravitačním poli, který vzniká působením gravitace na volné elektrony. Jak přesný voltmetr bychom potřebovali k jeho změření?*

Na elektrony ve visícím drátu bude působit tíhová síla. Elektrony se uspořádají tak, aby došlo k rovnováze. V rovnováze musí platit, že výsledná síla, která působí na elektron, je nulová. Nyní si musíme uvědomit, jaké síly na elektron působí. Kromě tíhové na něj působí síla vytvářená elektrickým polem, které vznikne přeuspořádáním elektronů v drátu. Dále na elektrony působí síla, která je „drží uvnitř drátu", tato je zejména na okrajích drátu velká v porovnání s ostatními, nicméně v rámci našich znalostí ji neumíme nijak uvážit.

Pro intenzitu elektrického pole $E$, které se vytvoří přeuspořádáním elektronů, musí platit

$$Ee = m_e g \ .$$

Napětí je definováno jako rozdíl potenciálů, bude pro něj tedy platit

$$U = El = \frac{m_e}{e} gl \ .$$

Spočteme-li si toto napětí pro drát délky jednoho metru ($l = 1\,\mathrm{m}$), dostaneme

$$U = 5{,}6 . 10^{-11}\,\mathrm{V}.$$

Vidíme tedy, že napětí je velmi malé. Kdybychom ho ovšem chtěli experimentálně zjistit, narazili bychom na ještě další problém. V drátech voltmetru totiž dojde ke stejnému jevu, a tak případné napětí voltmetr změřit nemůže.

Jelikož jsme zanedbali sílu, díky které je kov pevnou látkou, můžeme tento výsledek považovat nejvýše za řádový odhad.

***Karel Honzl***
kaja@fykos.mff.cuni.cz

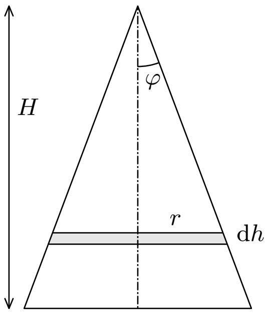
**Úloha I . P ... gravitace** *(5 bodů; průměr 1,29; řešilo 52 studentů)*

*Odhadněte rozdíl mezi intenzitou gravitačního pole na povrchu Země a na vrcholu hory a pokuste se spočítat, jaké parametry musí mít hora, aby byl tento rozdíl nulový. (Pokuste se alespoň o kvalitativní odhad, tj. rozhodněte, zda je pole na hoře silnější nebo slabší.)*

Abychom mohli spočítat gravitační zrychlení na povrchu hory, musíme si zvolit vhodný model a příslušné aproximace. Gravitační pole na hoře bude dáno součtem gravitačního pole Země a hory. Pole $g_z$, které vytváří Země ve výšce $h$ nad povrchem, je dáno Newtonovým gravitačním zákonem.

$$g_z(h) = \varkappa \frac{M_z}{(R+h)^2} = \varkappa \frac{4}{3} \frac{\pi \varrho R^3}{(R+h)^2} \ ,$$

kde $\varrho$ je hustota Země, $R$ její poloměr. Hora má složitější tvar a její příspěvek ke gravitačnímu zrychlení musíme spočítat obecněji. Zde udělalo nejvíce řešitelů chybu. Pouze sféricky symetrickou kouli můžeme při výpočtu gravitačního pole nahradit hmotným bodem v jejím těžišti. Horu si představíme jako kužel o výšce $H \ll R$, vrcholovém úhlu $2\varphi$ a hustotě $k\varrho$. Ze symetrie kužele vyplývá, že gravitační pole na vrcholu hory bude směřovat do středu podstavy. Jeho velikost spočítáme jako součet příspěvků od jednotlivých malých částí kužele, výpočet vede na integrál



Obr. 4

$$g_h = \varkappa \int_0^H \int_0^{h \operatorname{tg} \varphi} \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \frac{2\pi k \varrho r}{r^2+h^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}h \ .$$

Ten si můžete představit jako sčítání polí malinkatých prstýnků poloměru $r$, šířky $\mathrm{d}r$ a tloušťky $\mathrm{d}h$. Pro integraci ale musíme vzít část, která se promítá na osu kužele (toto spousta řešitelů opomíjela). Prstýnky vytvoří elementárníválečky tloušťky $\mathrm{d}h$ a z nich vytvoříme kužel. Gravitační pole hory je tedy $g_h = 2\varkappa\pi k \varrho H (1 - \cos\varphi)$.

Rozdíl mezi gravitačním polem na patě hory a na vrcholku je dán

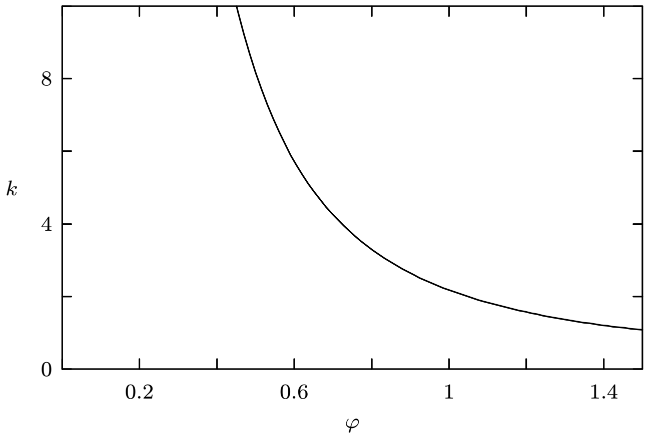
$$\Delta g = g_h + g_z(H) - g_z(0) = \varkappa \frac{4}{3} \frac{\pi \varrho R}{(1 + H/R)^2} + 2\varkappa\pi k \varrho H (1 - \cos\varphi) - \varkappa \frac{4}{3} \pi \varrho R \ .$$

Použijeme aproximaci $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$, která platí pro $x \ll 1$, a získáme

$$\Delta g = -\frac{8}{3} \varkappa \pi \varrho H + 2\pi H \varkappa k \varrho (1 - \cos\varphi) = 2\pi \varkappa H \varrho \left( k \, (1 - \cos\varphi) - \frac{4}{3} \right) \ .$$

Tedy gravitační pole Země s výškou klesá se stejnou mocninou, jako se kterou jej vytváří hora. Proto, pokud $k = \frac{4}{3(1-\cos\varphi)}$, bude intenzita gravitačního pole Země klesat stejně rychle, jako bude růst gravitační pole hory. Tzn. na takovýchto horách bude gravitační zrychlení stejné, jako u její paty.

Nyní pojďme diskutovat řešení pomocí grafu 5. V části pod křivkou bude gravitační zrychlení na hoře nižší než u její paty, nad křivkou bude naopak vyšší. Je vidět, že pro běžnou horninu ($k = 0,5$) hora, na které by bylo stejné gravitační zrychlení jako pod ní, skutečně neexistuje. Pro $k = 1$ by hora měla vrcholový úhel $180^\circ$, tedy by to byla jen další slupka na povrchu zemském.




Obr. 5

Také si můžete rozmyslet, jak by řešení vypadalo, kdybychom nepočítali gravitační nýbrž tíhové zrychlení. Museli bychom uvažovat ještě odstředivou sílu.

***Honza Pacák***
paci@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . E ... *reakční doba*** *(8 bodů; průměr 3,54; řešilo 50 studentů)*

*Změřte rychlost vedení vzruchu nervu.*

*Návod: Změřte svou reakční dobu na optický nebo zvukový podnět (v tomto případě můžeme předpokládat, že vzruch dorazí do mozku okamžitě). Poté změřte rychlost své reakce na dotek konce ruky nebo nohy. Porovnáním výsledků pak stanovte rychlost vedení vzruchu. Nezapomeňte, že pro správné statistické zpracování potřebujete naměřit minimálně deset hodnot.*

### *Úvod*

Podle zadání úlohy provedeme měření dvě. V prvním budeme měřit reakční dobu $t_r$ na optický či sluchový podnět. Předpokládáme přitom, že délka nervů přenášejících tento signál do mozku je malá. V druhém měření budeme zjišťovat dobu reakce $t_n$ na dotek na noze či ruce. Rychlost vedení vzruchu do mozku pak spočteme jako $v = \frac{l}{t_n - t_r}$, kde $l$ je odhad délky nervu. Není to doslova rychlost průchodu vzruchu podél samotného nervového vlákna, která je podle literatury asi $100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V námi měřené hodnotě je započítán i průchod vzruchu přes synapse a ostatní složitě popsatelné jevy.

### *Postup měření reakční doby $t_r$*

a) Člověk A drží pravítko mezi prsty člověka B, znenadání ho pustí a B, jakmile spatří padající pravítko, ho chytí. Z délky, ve které B pravítko chytil a doby volného pádu, se určí reakční doba $t_r$.
b) Na monitoru počítače necháme něco náhodně zobrazit, např. změnit barvu pozadí (nebo spustíme zvuk). V okamžiku, kdy signál zaregistrujeme stiskneme (nebo pustíme) tlačítko klávesnice (myši). Počítač necháme reakční dobu zaznamenat. Podle Jardy Trnky jsme k tomuto použili program na webové stránce `http://www.happyhub.com/network/reflex/`.
c) Zakryjeme číslice sekund, desetin a setin na stopkách a v okamžiku, kdy zaregistrujeme změnu na řádu desítek setin, stopky zastavíme.

*Postup měření rychlosti šíření vzruchu v nervu*

a) Modifikace předchozího postupu s pravítkem. Na pravítko tentokrát umístíme kousek papírku nebo jemný hrot. Zavřeme oči a registrujeme dotykový podnět. Reakční doba $t_n$ však vychází naprosto srovnatelná s reakční dobou $t_r$ měřenou, pokud se na pravítko díváme. V $t_n$ je zahrnut čas od začátku pádu pravítka do okamžiku, než si mozek uvědomí, že se pravítko ruky dotklo. V $t_r$ je narozdíl od toho zahrnut čas od začátku pádu pravítka do okamžiku, ve kterém si mozek uvědomí, že oko uvidělo padající pravítko.

   Dá se tedy usuzovat, že je nesprávný předpoklad o tom, že optický (popř. zvukový) podnět dorazí do mozku okamžitě. Doba, za kterou podnět do mozku dorazí, by se velmi přibližně dala odhadnout z faktu, že vzorkovací frekvence oka je asi 20 Hz, tj. vzorkovací doba asi 0,05 s, což je čas, který při našich měřeních hraje roli. Chceme-li přesto změřit rychlost vedení vzruchu, musíme vymyslet chytřejší metodu.

b) Ve stejný čas spustíme dvoje stopky. V prvním měření asistent svoje stopky vypne ve stejném okamžiku, kdy se dotkne čela experimentátora. Ten stiskne tlačítko svých stopek v okamžiku, kdy dotek ucítí. Rozdíl časů na obou stopkách je pak doba reakce $t_r$. Dobu reakce $t_n$ změří stejným způsobem, jen se asistent dotýká konce nohy.

   V řešeních jste často tento postup (maminka mě praští vařečkou a zároveň stiskne stopky) používali pro měření doby, za kterou do mozku dojde signál z konce nohy. Od toho času jste odečítali jinak změřenou reakční dobu. To dávalo velmi nepřesné výsledky, neboť „maminka“ není schopná dostatečně přesně zároveň stisknout stopky i udeřit experimentátora. Námi uvedená metoda však systematickou chybu „maminky“ eliminuje.

*Měření*

Náš postup při měření rychlosti šíření vzruchu z konce nohy do mozku byl následující: Využili jsme program na výše uvedené webové stránce. Osoba A reagovala na změnu barvy obrazovky tím, že se dotkla nohy resp. čela osoby B, která měla zavřené oči a na dotek reagovala stisknutím tlačítka myši. V následující tabulce jsou uvedeny naměřené hodnoty. Čas $t_n$ je měřen při doteku konce nohy, čas $t_r$ při doteku čela.

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_r$[s] | 0,49 | 0,49 | 0,55 | 0,49 | 0,55 | 0,44 | 0,38 | 0,39 | 0,5 | 0,44 | 0,49 |
| $t_n$[s] | 0,6 | 0,6 | 0,54 | 0,49 | 0,61 | 0,61 | 0,55 | 0,55 | 0,61 | 0,57 | 0,61 |

| | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. | 19. | 20. | 21. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_r$[s] | 0,44 | 0,5 | 0,49 | 0,51 | 0,49 | 0,5 | 0,47 | 0,49 | 0,44 | 0,44 | |
| $t_n$[s] | 0,6 | 0,55 | 0,61 | 0,55 | 0,6 | 0,49 | 0,5 | 0,61 | 0,55 | 0,55 | |

Tabulka – měření reakčních dob.

$$\bar{t}_r = (0,475 \pm 0,043)\mathrm{s}$$

$$\bar{t}_n = (0,569 \pm 0,040)\mathrm{s}$$

Směrodatnou odchylku aritmetického průměru časů spočteme podle vztahu

$$s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i^2}{n(n-1)}}.$$

Rozdíl časů je $\Delta t = t_n - t_r = 0{,}094\,\mathrm{s}$, směrodatná odchylka tohoto rozdílu je

$$s_m(\Delta t) = \sqrt{s_m^2(t_n) + s_m^2(t_r)} = 0{,}059\,\mathrm{s}.$$

Relativní chyba je $\delta(\Delta t) = 0{,}63$. Délku nervů z konce nohy odhadneme výškou osoby $l = 180 \pm 30\,\mathrm{cm}$, chyba je způsobena tím, že nevíme, kudy přesně nervy vedou, relativní chyba $\delta l = 0{,}16$.

Průměrná rychlost vedení vzruchu vychází $\bar{v} = l/\Delta t = 19\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, její směrodatná odchylka $s_m(v) = v\sqrt{(\delta l)^2 + (\delta(\Delta t))^2} = 12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Směrodatná odchylka je srovnatelná se samotnou hodnotou, rychlost $v = 19\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je tedy spíše jen odhad.

*Závěr*

Měření je zatíženo velikou chybou, která je způsobena tím, že při výpočtu rychlosti odečítáme dvě velmi blízké hodnoty, jejich směrodatná chyba se ve čtvercích sčítá, což způsobí velikou relativní chybu rozdílu, to si mnoho z vás při výpočtu chyb neuvědomilo.

Dále ocitujeme několik vět z řešení Jardy Trnky, neboť on podle nás situaci vystihl: „Měření nebylo jednoduché, protože se při něm nespoléhalo na nějaké přístroje, ale zejména na vlastní mozek. Tudíž ke změření reakce byla potřeba koncentrace a zde by mohl být první zdroj chyb. Na základě svých výsledků mohu tvrdit, že rychlost šíření vzruchu v nervu je řádově v desítkách metrů za vteřinu.“

***Lenka Zdeborová***
lenka@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . S ... *komplexní čísla*** *(4 body; průměr 2,24; řešilo 21 studentů)*

a) *Spočtěte reálnou a imaginární část $\sin(a + bi)$.*
b) *Pomocí komplexní symbolické metody odvoďte vztah pro rezonanční frekvenci paralelního RLC obvodu, tj. nalezněte frekvenci, pro kterou má při konstantním napětí celkový proud v obvodu maximální amplitudu.*
c) *Sečtěte pomocí komplexních čísel následující řady. (Návod: řada $A + Bi$ je geometrická.)*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta} \cos(n\varphi), \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta} \sin(n\varphi).$$

a) Vyjádřeme si $\sin(a+b\mathrm{i})$ pomocí Eulerova vztahu. Pro $\sin x$ dostaneme (jak již bylo uvedeno v seriálu): $\sin x = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/2\mathrm{i}$. Nyní dosazením $a + b\mathrm{i}$ za $x$ obdržíme

$$\begin{aligned}\sin(a + b\mathrm{i}) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{b}\right) = \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{-b}(\cos a + \mathrm{i}\sin a) - \mathrm{e}^{b}(\cos a - \mathrm{i}\sin a)\right) = \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{b})\sin a + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{b})\cos a.\end{aligned}$$

Tedy reálná a imaginární část čísla $\sin(a + b\mathrm{i})$ jsou rovny

$$\mathcal{Re}\,(\sin(a + b\mathrm{i})) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{b})\cos a, \quad \mathcal{Im}\,(\sin(a + b\mathrm{i})) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-b})\sin a.$$

b) V případě paralelního zapojení vyjdeme z poznatku, že pro celkovou impedanci obvodu platí, že se sčítají převrácené hodnoty impedancí jednotlivých členů obvodu. Majíce toto na zřeteli, pro proud v obvodu dostaneme

$$\hat{I} = \left(\frac{1}{R} + \mathrm{i}\omega C + \frac{1}{\mathrm{i}\omega L}\right)\hat{U},$$

$$\hat{I} = \left(\frac{1}{R} + \mathrm{i}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right)\hat{U}.$$

Nás ovšem zajímá pouze velikost proudu, nikoliv jeho fáze. Potom

$$|\hat{I}| = |\hat{U}|\sqrt{\frac{1}{R}^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

K rezonanci bude docházet, jestliže se druhý člen pod odmocninou bude rovnat nule. Tedy $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. V případě paralelní rezonance nastává ovšem minimum proudu. Velikost proudu není pro $\omega \to \infty$ nijak omezena.

c) Dle návodu využijeme toho, že řada $A + B\mathrm{i}$ je geometrická a tedy ji bude možno za jistých předpokladů sečíst. Tedy

$$A + B\mathrm{i} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta}\cos(n\delta) + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta}\sin(n\delta),$$

$$A + B\mathrm{i} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\delta} = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta})^n.$$

Jedná se proto o geometrickou řadu s kvocientem $\mathrm{e}^{-\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$. Aby byla řada konvergentní, musí být velikost kvocientu menší než jedna. Velikost $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ je rovna jedné a proto musí být velikost $\mathrm{e}^{-\delta}$ menší než jedna. Čili $\delta > 0$. Známý vztah na součet nekonečné geometrické řady začínající jedničkou je $s = \frac{1}{1-q}$, kde q je kvocient. Přímým dosazením dostaneme

$$s = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\delta}\cos\delta - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\delta}\sin\delta} =$$

$$= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta}\cos\delta + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\delta}\sin\delta}{(1 - \mathrm{e}^{-\delta}\cos\delta)^2 + (\mathrm{e}^{-\delta}\sin\delta)^2} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta}\cos\delta + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\delta}\sin\delta}{1 - 2\mathrm{e}^{-\delta}\cos\delta}.$$

Potom tedy je součet řady $A$ roven reálné části tohoto součtu a obdobně součet řady $B$ imaginární části.

$$A = \mathcal{R}e\ s = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta}\cos\delta}{1 - 2\mathrm{e}^{-\delta}\cos\delta}$$

$$B = \mathcal{I}m\ s = \frac{\mathrm{e}^{-\delta}\sin\delta}{1 - 2\mathrm{e}^{-\delta}\cos\delta}.$$

***Míra Šulc***
mira@fykos.mff.cuni.cz

# Seriál na pokračování

# *Kapitola 3: Integrály*

Třetí díl seriálu bude pojednávat o integrálním počtu. Pro začátek malé upozornění: pokud jste si zatím nepřečetli druhý díl (ten byl o derivacích) a derivovat neumíte, určitě si ho přečtěte. Dále bych doporučil těm, kteří nejsou v derivování zcela zběhlí (i když jste bez problémů minulý díl pochopili), aby si alespoň zběžně přečetli nějakou knihu, která o této problematice pojednává podrobněji, a propočítali co nejvíce příkladů (minulý díl se dá považovat jen za velmi stručný úvod).

A nyní k integrování. Začneme definicí takzvané primitivní funkce. Řekneme, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ pokud platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = f(x).$$

Integrováním pak rozumíme proces který nás přivede od funkce $f$ k funkci $F$. Integrování je tedy opakem derivování. Funkce $F$ bývá nazývána též neurčitý integrál funkce $f$ nebo jednoduše integrál z $f$. Tedy například funkce $F(x) = 1/3x^3 + 3$ je primitivní funkcí k $f(x) = x^2$ protože $F' = f$. Všimněte si, že pokud $F$ je primitivní funkcí k $f$, pak i funkce $F + C$, kde $C$ je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k $f$. Toto tvrzení plyne ihned z pravidla pro derivování součtu dvou funkcí a toho, že derivace konstanty je nula. Primitivní funkce tedy není určena jednoznačně. Vztah mezi funkcí a jejím integrálem se pak značí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Člen $\mathrm{d}x$ můžete chápat tak, že říká podle které proměnné integrujeme, tedy podle které proměnné musíme zderivovat výsledek, abychom dostali původní funkci (u složitějších funkcí to nemusí být zřejmé). Jeho význam je však poněkud hlubší a vyplyne z následujícího textu.

## *Určitý integrál*

S pojmem primitivní funkce úzce souvisí takzvaný určitý integrál. Určitý integrál funkce $f(x)$ z bodu $a$ do bodu $b$ je definován takto: Označme $S_n$ součet následující řady

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{n+1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n+1}\right). \tag{2}$$

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme pomocí $n$ dělících bodů na $n+1$ stejně dlouhých intervalů. Nad každým z těchto intervalů nakreslíme obdélník stejné výšky jako funkční hodnota $f$ v levém krajním bodu tohoto intervalu. Suma (2) má pak význam součtu obsahů těchto obdélníků. Je zřejmé že pro rostoucí $n$ je aproximace funkce $f$ pomocí takovýchto obdélníků stále přesnější. Určitým integrálem funkce $f$ od $a$ do $b$ pak nazveme číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Symbol na levé straně rovnosti je standardním značením pro určitý integrál. Limita na pravé straně je limitou posloupnosti čísel $S_n$ (pokud nevíte co je to limita posloupnosti, pak vězte že je to číslo které charakterizuje, kam se blíží hodnoty $S_n$ pro velká $n$ a její definice je podobná definici limity funkce). Význam členu $\mathrm{d}x$ tedy spočívá v tom, že si můžeme určitý integrál představit jako sumu (2) při „nekonečně“ jemném dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, tak že vzdálenost mezi dvěma dělícími body je $\mathrm{d}x$. V tomto případě sčítáme hodnoty $f(x)\,\mathrm{d}x$.

Určitý integrál je tedy „věc“, která přiřadí dvěma číslům $a$ a $b$ a dané funkci číslo. Toto číslo má význam obsahu plochy pod grafem této funkce mezi body $a$ a $b$.

Jaký je vztah mezi určitým a neurčitým integrálem? Již zmíněná úzká souvislost mezi určitým a neurčitým integrálem je dána následujícím velmi důležitým vztahem (takzvaná Newton-Leibnitzova formule)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

kde $F$ je jakákoliv pevně zvolená primitivní funkce k $f$. Máme tedy jednoduchou (a v podstatě také jedinou reálně použitelnou) metodu, jak určité integrály počítat.

### *Jak integrály počítat?*

Pravidla pro výpočet integrálů jsou vlastně jen obrácená pravidla pro výpočet derivací (bohužel nejsou vždy tak přímočará, jako v případě derivování). Malý příklad. Derivace funkce $y = x^n$ je $y' = nx^{n-1}$. Integrál z $y = x^n$ je tedy $Y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (jak se snadno přesvědčíme zderivováním). Analogicky zjistíme, jak integrovat další elementární funkce pohledem do tabulky jejich derivací. Tyto základní integrály (až na konstantu) jsou shrnuty v následující tabulce

| | |
|---|---|
| $y = a$ | $\int y\,\mathrm{d}x = ax$ |
| $y = x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = x^2/2$ |
| $y = x^r, r \neq -1$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ |
| $y = \sin x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = -\cos x$ |
| $y = \cos x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \sin x$ |
| $y = 1/\cos^2 x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x$ |
| $y = \mathrm{e}^x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$ |
| $y = 1/x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert$ |
| $y = 1/\sqrt{1-x^2}$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \arcsin x$ |
| $y = 1/(1+x^2)$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\, x$ |
| $y = \sinh x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \cosh x$ |
| $y = \cosh x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \sinh x$ |
| $y = 1/\cosh^2 x$ | $\int y\,\mathrm{d}x = \mathrm{tgh}\, x$ |

Pro integrál součtu dvou funkcí platí

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Situace se však komplikuje v případě složitějších funkcí. Pro výpočet integrálu ze součinu nebo složení více funkcí totiž neexistují jednoduchá pravidla, která by výpočet převedla na výpočet integrálů elementárních funkcí tak, jako v případě derivací. Existují však pravidla, pomocí kterých převedeme takovéto integrály na integrály jednodušší.

### *Integrace per partes*

Metoda takzvané integrace per partes (po částech) je odvozena od pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí. Připomeňme, že toto pravidlo zní

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)g(x)\right) = f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) + g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x).$$

Zintegrováním této rovnice a přeuspořádáním členů dostáváme

$$\int f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro zjednodušení můžeme dále označit $g'(x) = h(x)$, a tedy $g(x) = H(x)$, kde $H(x)$ je primitivní funkce k $h(x)$. Dostáváme pak

$$\int f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = f(x)H(x) - \int H(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Použití této metody můžeme demonstrovat na následujícím příkladě. Chceme spočítat integrál z funkce $y = x\sin x$. Položíme $f(x) = x$ a $h(x) = \sin x$. Tedy $f'(x) = 1$ a $H(x) = -\cos x + C_1$ (viz tabulka integrálů). Dosazením do (3) dostáváme

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = x(\cos x + C_1) - \int(\cos x + C_1)\,\mathrm{d}x + C.$$

Zbývá tedy vypočítat integrál na pravé straně, ale to již není problém. Dostáváme

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = x\cos x - \sin x + C.$$

O správnosti tohoto výsledku se můžete přesvědčit jeho zderivováním.

### *Substituce*

Další důležitou metodou pro výpočet integrálů je metoda substituční. Stejně jako je metoda per partes odvozena od vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí, je metoda substituční založena na vzorci pro derivaci složené funkce. Ten vypadá následovně

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Po zintegrování a přeznačení $f' = h$, $f = H$ dostáváme

$$\int h(g(x))g'\,\mathrm{d}x = H(g(x)) + C.$$

V praxi při počítání integrálů substitucí postupujeme následovně: Funkci $g(x)$ substitujeme novou proměnnou $y = g(x)$, nepřesně matematicky, ale šikovně pro představu můžeme funkci $y$ zderivovat a napsat $\mathrm{d}y = g'\,\mathrm{d}x$, můžeme dosadit a psát

$$\int h(g(x))g'\,\mathrm{d}x = \int h(y)\,\mathrm{d}y = H(y) + C = H(g(x)) + C.$$

Pro vyjasnění není nic lepšího, než spočítat příklad. Zintegrujme tedy funkci $f(x) = \mathrm{tg}\,x$.

$$\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Zavedeme substituci $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$, dosadíme a získáme výsledek

$$\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = -\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|cosx| + C.$$

*Aplikace*

S neurčitými integrály se ve fyzice setkáváme většinou v případech, kdy odněkud známe derivaci funkce, která nás zajímá (většinou známe jen vztah svazující hledanou funkci a její derivace – tzv. diferenciální rovnici, ale o těch si povíme až v příštím díle) a výsledek je tedy primitivní funkcí k této derivaci. Například víme, že časová derivace polohy tělesa padajícího volným pádem je $gt + v_0$. Pro polohu tohoto tělesa tedy platí

$$x(t) = \int (gt + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C.$$

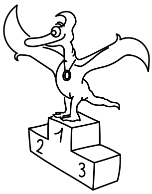
Konstanta $C$ pak má význam počáteční polohy.

Určité integrály pak nacházejí uplatnění při výpočtu veličin jako je objem, moment setrvačnosti, poloha těžiště, elektrické či gravitační pole apod., tedy všude, kde je třeba nějakým způsobem sčítat malé příspěvky (k objemu, hmotnosti, intenzitě pole atd.)

Poznámka nakonec: V tomto textu se dopouštíme velkého množství drobných nepřesností usnadňujících výklad. Rozhodně se tedy nejedná o matematicky korektní pojednání o integrálním počtu, ale spíše o jakýsi úvod do problému sloužící k získání intuitivní představy.

### Úloha III . S ... *integrály*

a) Spočítejte integrály funkcí $y = x^2 \mathrm{e}^x$, $y = \sin^3 x \cos^2 x$.
b) Určete obsah obrazce, který je ohraničen funkcemi $y_1 = \sqrt{|x|} + \sqrt{1 - |x|}$, $y_2 = \sqrt{|x|} - \sqrt{1 - |x|}$. Tento obrazec nakreslete.



# *Pořadí řešitelů po I. sérii*

## *Kategorie čtvrtých ročníků*

| | **jméno** | **škola** | **1** | **2** | **3** | **4** | **P** | **E** | **S** | II | **%** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Student Pilný* | MFF UK | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 4 | **33** | *100* | **33** |
| **1.–2.** | *Miroslav Hejna* | G F. M. Pelcla | 4 | 4 | 5 | 4 | 5 | 7 | 3 | **32** | *97* | **32** |
| | *Jaroslav Trnka* | G Na Pražačce | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 9 | 4 | **32** | *97* | **32** |
| **3.** | *Jan Prachař* | G F. M. Pelcla | 4 | 4 | 4 | 4 | – | 9 | 4 | **29** | *104* | **29** |
| **4.** | *Lukáš Chvátal* | | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 6 | 2 | **27** | *82* | **27** |
| **5.–6.** | *Václav Cviček* | G Petra Bezruče | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | – | 4 | **24** | *96* | **24** |
| | *Karel Tůma* | G Matiční | 4 | 4 | 3 | 1 | 2 | 7 | 3 | **24** | *73* | **24** |
| **7.–8.** | *Michal Bareš* | G Mikulášské náměstí | 4 | 4 | – | 3 | 3 | 6 | – | **20** | *80* | **20** |
| | *Bryan Chen* | | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | **20** | *61* | **20** |
| **9.** | *Tibor Vansa* | G Matiční | 4 | 4 | 4 | – | 1 | 4 | 2 | **19** | *66* | **19** |
| **10.** | *Jiří Lipovský* | G Bystřice nad Pernštejnem | 4 | – | 3 | – | 4 | 6 | – | **17** | *81* | **17** |
| **11.** | *Tomáš Kozelek* | G Kadaň | – | 3 | 3 | – | 2 | 5 | – | **13** | *62* | **13** |
| **12.** | *Lukáš Vozdecký* | G Vejrostova, Brno | 2 | 5 | 2 | – | 2 | – | 1 | **12** | *57* | **12** |
| **13.** | *Jan Perný* | G Nová Paka | – | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | – | **11** | *44* | **11** |
| **14.** | *Matěj Týč* | G Zastávka | 3 | 4 | – | – | 1 | – | 1 | **9** | *53* | **9** |
| **15.–21.** | *Vendula Exnerová* | G Nad Štolou, Praha | – | 1 | – | – | 1 | 2 | – | **4** | *24* | **4** |
| | *Josef Hanuš* | G Děčín | – | 0 | 2 | – | 0 | 2 | – | **4** | *19* | **4** |
| | *Radim Kusák* | G Frýdek-Místek | – | – | 4 | – | – | – | – | **4** | *100* | **4** |
| | *Marek Pavlů* | SOU Litovel | 4 | – | – | – | – | – | – | **4** | *100* | **4** |
| | *Lukáš Snášel* | COP Hronov | 4 | – | – | – | – | – | – | **4** | *100* | **4** |
| | *Martin Szablatura* | | – | 4 | – | – | – | – | – | **4** | *100* | **4** |
| | *Marek Vyšinka* | G Matyáše Lercha | – | 4 | – | – | – | – | – | **4** | *100* | **4** |
| **22.–23.** | *Miloslav Havelka* | G Zastávka | 2 | – | – | – | – | – | – | **2** | *50* | **2** |
| | *Ľuboš Rabčan* | G Trstená | – | 1 | 1 | – | 0 | – | – | **2** | *15* | **2** |
| **24.–27.** | *Barbora Galaczová* | | 1 | – | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |
| | *Veronika Chromčíková* | G Přerov | – | 1 | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |
| | *Petr Navrátil* | G Přerov | 1 | – | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |
| | *Zuzana Svobodová* | G Zlaté Moravce | – | 1 | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |

## Kategorie třetích ročníků

| | jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | II | % | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Student Pilný* | MFF UK | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 4 | **33** | *100* | **33** |
| **1.** | *Matouš Ringel* | G Broumov | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | **28** | *85* | **28** |
| **2.** | *Jana Matějová* | SPŠ Chrudim | 3 | 5 | 4 | 4 | 2 | 5 | 3 | **26** | *79* | **26** |
| **3.** | *Alexadr Kazda* | G Nad Alejí, Praha | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | **25** | *76* | **25** |
| **4.** | *Jan Moláček* | G J. K. Tyla | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | – | 2 | **23** | *92* | **23** |
| **5.** | *Jan Olšina* | G Kroměříž | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | – | **21** | *72* | **21** |
| **6.–7.** | *Vojtěch Krejčiřík* | | 4 | 4 | 4 | – | 2 | 5 | 0 | **19** | *66* | **19** |
| | *Jakub Závodný* | G Bratislava, Grösslingova | 4 | 4 | 3 | 4 | 1 | 3 | – | **19** | *66* | **19** |
| **8.** | *Jan Ondruš* | G F. M. Pelcla | – | 5 | 1 | 0 | 1 | 8 | – | **15** | *60* | **15** |
| **9.–12.** | *Petr Bílý* | G Slaný | 4 | 4 | – | 3 | 2 | – | – | **13** | *76* | **13** |
| | *Petr Dostál* | G Žamberk | 4 | 4 | 1 | – | 1 | 3 | – | **13** | *52* | **13** |
| | *Pavel Hála* | G Český Krumlov | 3 | 4 | 2 | – | 1 | 2 | 1 | **13** | *45* | **13** |
| | *Hynek Hanke* | G Budějovická, Praha | – | 4 | 1 | 3 | 1 | 4 | – | **13** | *52* | **13** |
| **13.** | *Radoslav Sopoliga* | G Svidník | 1 | 4 | 1 | 4 | 0 | – | – | **10** | *48* | **10** |
| **14.–15.** | *Jan Švarcbach* | G Louny | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 3 | 1 | **9** | *27* | **9** |
| | *Michal Witiska* | G Jihlava | 2 | 2 | 4 | 0 | 0 | 1 | – | **9** | *31* | **9** |
| **16.–18.** | *Michal Růžek* | G Arcibiskupské | – | 4 | 3 | – | 1 | – | – | **8** | *62* | **8** |
| | *Mária Šedivá* | G Ľudovíta Štúra | 2 | 3 | 1 | – | – | 2 | – | **8** | *40* | **8** |
| | *Zdeněk Váňa* | COP Hronov | 4 | – | 3 | 1 | – | – | – | **8** | *67* | **8** |
| **19.–21.** | *Zuzana Rozlívková* | G Boženy Němcové | 3 | 4 | – | – | – | – | – | **7** | *88* | **7** |
| | *Martin Rybář* | GOA Blansko | – | 1 | – | – | 1 | 5 | – | **7** | *41* | **7** |
| | *Lucie Strmisková* | G Kyjov | – | 3 | – | – | – | 4 | – | **7** | *58* | **7** |
| **22.–23.** | *Tomáš Gavenčiak* | G Bílovec | 1 | 4 | – | – | – | 1 | – | **6** | *38* | **6** |
| | *Jana Hrudíková* | G Přerov | – | – | 3 | – | – | 3 | – | **6** | *50* | **6** |
| **24.–25.** | *Pavol Lakatoš* | G Veľké Kapušany | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | – | – | **5** | *24* | **5** |
| | *Jan Skalický* | G J. Heyrovského, Praha | 1 | 4 | – | – | 0 | – | – | **5** | *38* | **5** |
| **26.–27.** | *Markéta Novotná* | G Hranice | – | 4 | – | – | – | – | – | **4** | *100* | **4** |
| | *Martina Smolová* | G Písek | – | 4 | – | – | 0 | – | – | **4** | *44* | **4** |
| **28.–29.** | *Pavlína Karníková* | G Dobruška | 0 | 2 | 1 | – | – | – | – | **3** | *25* | **3** |
| | *Libor Kukačka* | GOA Vrchlabí | – | 3 | – | – | – | – | – | **3** | *75* | **3** |
| **30.–33.** | *Kateřina Balcarová* | G Dobruška | – | 1 | 1 | – | 0 | – | – | **2** | *15* | **2** |
| | *Michal Havel* | COP Hronov | 0 | 2 | – | – | – | – | – | **2** | *25* | **2** |
| | *Jan Křivonožka* | G Bílovec | 0 | 1 | 1 | – | – | – | – | **2** | *17* | **2** |
| | *Eva Lovíšková* | G V. Makovského | – | 1 | 1 | – | – | – | – | **2** | *25* | **2** |
| **34.–35.** | *Jana Pechková* | G Trutnov | – | 1 | – | – | 0 | – | – | **1** | *11* | **1** |
| | *Stanislav Plánička* | G Klatovy | 1 | – | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |

## Kategorie druhých ročníků

| | jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | II | % | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Student Pilný* | MFF UK | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 4 | **33** | *100* | **33** |
| **1.** | *Petr Houštěk* | G Pelhřimov | 4 | 4 | – | 4 | 1 | 5 | 3 | **21** | *72* | **21** |
| **2.** | *Anton Repko* | G Prešov M | 4 | 4 | 4 | 4 | – | – | 4 | **20** | *100* | **20** |
| **3.** | *Peter Greškovič* | G Svidník | 3 | 4 | 0 | 3 | 0 | 3 | – | **13** | *45* | **13** |
| **4.** | *Michal Humpula* | G Uherský Brod | – | 4 | – | 4 | – | 2 | – | **10** | *63* | **10** |
| **5.–6.** | *Hana Suchomelová* | G Ľudovíta Štúra | 2 | 4 | 1 | – | 0 | 2 | – | **9** | *36* | **9** |
| | *Martin Takáč* | G Nové Zámky | 2 | 4 | 2 | – | – | 1 | – | **9** | *45* | **9** |
| **7.** | *Rostislav Kváš* | G Jihlava | – | 4 | 4 | – | – | – | – | **8** | *100* | **8** |
| **8.–9.** | *Lenka Rychtrová* | G Louny | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 | – | **7** | *24* | **7** |
| | *Markéta Vilimovská* | G Českolipská, Praha | 0 | 4 | – | – | – | 3 | – | **7** | *44* | **7** |
| **10.** | *Markéta Kavalírová* | G Českolipská, Praha | – | 2 | 1 | – | – | 3 | – | **6** | *38* | **6** |
| **11.–12.** | *Jiří Kubr* | COP Hronov | 2 | 3 | – | – | – | – | – | **5** | *63* | **5** |
| | *Zdeněk Kučka* | G Žďár nad Sázavou | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | **5** | *15* | **5** |
| **13.** | *Aleš Razým* | | 0 | 3 | 1 | – | 0 | – | – | **4** | *24* | **4** |
| **14.** | *Karel Hofman* | COP Hronov | – | – | – | – | – | 3 | – | **3** | *38* | **3** |
| **15.–16.** | *Kateřina Divišová* | GOA Sedlčany | – | 1 | 1 | – | 0 | – | – | **2** | *15* | **2** |
| | *Monika Martinisková* | | 0 | 2 | – | – | 0 | – | – | **2** | *15* | **2** |
| **17.–19.** | *Jiří Kulda* | COP Hronov | 1 | – | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |
| | *Štěpánka Mohylová* | G Čs. exilu | – | – | – | – | – | 1 | – | **1** | *13* | **1** |
| | *Vladimíra Sečkárová* | G J. G. Tajovského | 0 | 1 | – | – | 0 | – | – | **1** | *8* | **1** |

## Kategorie prvních ročníků

| | **jméno** | **škola** | **1** | **2** | **3** | **4** | **P** | **E** | **S** | II | % | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Student Pilný* | MFF UK | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 4 | **33** | *100* | **33** |
| **1.** | *Tereza Klimošová* | G Lanškroun | 5 | 4 | 4 | – | – | – | – | **13** | *108* | **13** |
| **2.–3.** | *Michal Sivák* | G Ľudovíta Štúra | 2 | 3 | 1 | – | – | 2 | – | **8** | *40* | **8** |
| | *Vladimír Sivák* | G Ľudovíta Štúra | 2 | 3 | 1 | – | – | 2 | – | **8** | *40* | **8** |
| **4.–5.** | *Petra Malá* | | – | 3 | – | – | 1 | 3 | – | **7** | *41* | **7** |
| | *Jan Valášek* | G Broumov | 3 | 4 | – | – | – | – | – | **7** | *88* | **7** |
| **6.–8.** | *Jan Bednář* | COP Hronov | 3 | – | – | 3 | – | – | – | **6** | *75* | **6** |
| | *Ondrej Bogár* | ZŠ Trenčín | – | 4 | – | – | 0 | 2 | – | **6** | *35* | **6** |
| | *Jana Vrábelová* | ZŠ Trenčín | 2 | 1 | 1 | – | – | 2 | – | **6** | *30* | **6** |
| **9.** | *Tomáš Bednárik* | G Vsetín | – | 3 | 1 | – | – | – | – | **4** | *50* | **4** |
| **10.** | *Daniela Svobodová* | | 2 | – | – | – | – | 1 | – | **3** | *25* | **3** |
| **11.** | *Marek Jansa* | COP Hronov | 0 | 1 | – | – | – | 1 | – | **2** | *13* | **2** |
| **12.–13.** | *Radek Škuta* | G Čs. exilu | – | – | – | – | – | 1 | – | **1** | *13* | **1** |
| | *Zuzana Urbancová* | G Vlašim | – | 1 | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |

***FYKOS***
***UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta***
***Ústav teoretické fyziky***
***V Holešovičkách 2***
***180 00 Praha 8***

www: http://fykos.mff.cuni.cz
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.