

## Zadání V. série



Termín odeslání: 14. dubna 2003

### Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou zadání letošní předposlední série. Někteří z vás (ti úspěšnější) navíc obdrželi pozvánku na jarní soustředění. Ostatní ovšem nemusí házet flintu do žita! O účasti na podzimním soustředění ještě rozhodne druhá polovina semináře.

Zájemci si mohou objednat ročenku loňského ročníku semináře, ve které najdou zadání a řešení všech úloh, seriál na pokračování a pořadí řešitelů. Stačí do obálky vložit 50 korun (českých, slovenských, dánských či švédských). Stejným způsobem si můžete objednat i starší publikace – XIV. a XIII. ročník za 40 korun, XII. a XI. ročník za 20 korun, IX. ročník za 10 korun a VIII. ročník za bezkonkurenčních 0 korun. Nezapomeňte do obálky vložit lístek se seznamem publikací, které si objednáváte.

Ročenky si budete moci osobně koupit také na Dni s experimentální fyzikou a na soustředění. Ale konec povídání a hurá na úlohy. Ať se vám líbí!

**Honza Houštek**

### Úloha V.1 ... prší, prší

V dešťovém mraku je množství malých kapiček vody, jejichž hustotu (tj. celkovou hmotnost kapiček v nějakém objemu lomeno tímto objemem) označme  $\varrho_1$ , hustotu vody  $\varrho_0$ . Spojením několika kapiček vznikne větší kapka, která začne padat a postupně na sebe nabaluje další a další kapičky. Spočítejte, jak se bude měnit poloměr padající kapky, a s jakým zrychlením se bude pohybovat.

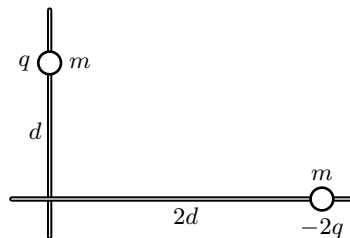
Pro jednoduchost neuvvažujte odpor vzduchu působící na kapku a malé kapičky považujte za nehybné.

### Úloha V.2 ... Apollo

Odhadněte, za jak dlouho se Apollo dostane na orbitu Měsíce, neplýtvá-li zbytečně palivem. Nezapomeňte uvést, jaké zjednodušující předpoklady jste při výpočtu provedli.

### Úloha V.3 ... elektrický minigolf

Mějme dvě na sebe kolmé nevodivé tyče a na nich nabitě kuličky (viz obr. 1), které se po nich mohou po tyčích volně pohybovat. Kuličky mají stejnou hmotnost  $m$  a náboje  $q$  a  $-2q$ . Na počátku jsou v klidu a jejich vzdálenost od průsečíku tyčí je  $d$  a  $2d$ . Určete, kde se bude nacházet druhá kulička v okamžiku, kdy první dosáhle průsečíku tyčí.



Obr. 1. Náboje na tyčích



závislosti odporové síly na rychlosti. Dále se ovšem mění směr  $\varphi$  a s ním i  $S$  (z boku má auto větší průřez) a  $C$  tvar auta je relativně dobře aerodynamický při pohybu dopředu, což zřejmě neplatí pro pohyb do strany. Nicméně uvážíme-li, že rychlost větru bude někde v intervalu  $10\text{--}40\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  a rychlost auta  $100\text{--}200\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , nebudou změny směru příliš výrazné a můžeme  $C$  a  $S$  považovat za konstantní.

Pokud navíc uvážíme  $u \ll v$  (což zejména v druhé mocnině bude celkem dobře splněno), zredukuje se závislost boční síly na rychlosti na vztah

$$F_b = F_{\text{odp}} \sin \varphi = \frac{1}{2} C S \rho v^2 \sim v. \quad (2)$$

Lze tedy říct, že v jisté aproximaci platí, že velikost boční síly je úměrná rychlosti auta. Otázka je, jak se to projeví na řízení. Začne-li síla náhle působit, zareaguje řidič až za určitý čas. Za tu dobu způsobí boční síla vychýlení automobilu o vzdálenost, která je úměrná její velikosti. Tedy s rostoucí rychlostí auta roste i účinek větru na jeho pohyb. Navíc je otázkou, jak se tento účinek projeví na řízení. Obecně totiž platí, že při vyšší rychlosti je auto hůře ovladatelné a tedy by i stejný účinek byl při větší rychlosti pro řidiče horší.

**Honza Houšťek**

honza@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha III.2 ... železniční most (4 body; průměr 2,64; řešilo 14 studentů)

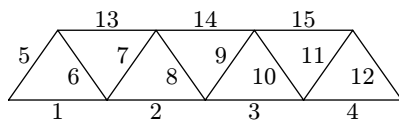
Chrabrý rudoarmějec vjel tankem na železniční most, jehož konstrukce, nad ním se tyčící, je schématicky znázorněna na obr. 3. Vaším úkolem je popsat, jak moc budou při přejezdu namáhány jednotlivé části mostu. Pokud jsou meze pevnosti všech tyčí v tahu stejné jako meze v tlaku, určete maximální hmotnost tanku, který po mostě může přejet. Můžete uvažovat, že tank je oproti mostu malý.

Při řešení této úlohy zanedbáme namáhání mostu vlastní vahou. Tím si celou úlohu zjednodušíme a toto namáhání by šlo nakonec do celého výsledku započítat. Dále budeme předpokládat, že se jednotlivé nosníky mostu nebudou prohýbat. Toto by v praxi zcela zanedbat nešlo, ale pro naše přibližné řešení to bude stačit.

Nejdříve si očíslováme nosníky (viz obr. 3). Nosníky zpevňující vozovku očíslováme 1–4, šikmé nosníky 5–12 a horní vodorovné nosníky 13–15. Úhel mezi šikmým a vodorovným nosníkem označíme  $\alpha$ . Po vjetí tanku na most na nosníky bude na obou koncích působit síla, stejné velikosti opačného směru. Tuto velikost u  $i$ -tého nosníku označíme  $f_i$  a budeme používat konvenci, když je tyč namáhána v tlaku bude  $f_i$  kladné a v tahu záporné. V rovnováze bude platit, že síly působící v jednom uzlu se navzájem vyruší. Díky symetrii bude stačit vypočítat zatížení mostu jen pro tank na dílech 1 a 2. Když bude tank na dílu, rozdělí se dvě části, které budou působit na koncích tohoto dílu.

Když budeme psát rovnice, pro vyrušení sil v jednom uzlu, získáme dvě rovnice, jednu pro svislou složku síly a jednu pro vodorovnou. Nejdříve si napíšeme rovnice pro horní čtyři uzly.

$$\begin{aligned} f_5 + f_6 &= 0, & (f_5 - f_6) \cos \alpha - f_{13} &= 0, \\ f_7 + f_8 &= 0, & (f_7 - f_8) \cos \alpha + f_{13} - f_{14} &= 0, \\ f_9 + f_{10} &= 0, & (f_9 - f_{10}) \cos \alpha + f_{14} - f_{15} &= 0, \\ f_{11} + f_{12} &= 0, & (f_{11} - f_{12}) \cos \alpha + f_{15} &= 0. \end{aligned}$$



Obr. 3

Dále napíšeme rovnice pro uzel mezi díly 3 a 4

$$f_3 - f_4 + (f_{10} - f_{11}) \cos \alpha = 0, \quad f_{10} + f_{11} = 0.$$

Nyní napíšeme rovnice pro uzly mezi díly 1, 2 a 3. V uzlu mezi 1 a 2 necháme působit sílu  $f_a$ , v druhém  $f_b$ . Tyto síly budou působit směrem dolů. Dostaneme tedy rovnice

$$\begin{aligned} (f_6 + f_7) \sin \alpha &= f_a, & f_1 - f_2 + (f_6 - f_7) \cos \alpha &= 0, \\ (f_8 + f_9) \sin \alpha &= f_b, & f_2 - f_3 + (f_8 - f_9) \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Zatím máme 14 rovnic a patnáct neznámých. Jako poslední rovnici přidáme podmínku, že síla na jednom konci mostu je svislá

$$f_1 + f_5 \cos \alpha = 0.$$

Nyní máme dostatek rovnic, je jich sice 15, ale řešení není zas tak složité. Po chvíli práce dostaneme

$$\begin{aligned} f_1 &= (3f_a + 2f_b) \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha}, & f_2 &= (5f_a + 6f_b) \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha}, \\ f_3 &= -(f_a + 2f_b) \frac{3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha}, & f_4 &= (f_a + 2f_b) \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha}, \\ f_6 &= -f_5 = \frac{3f_a + 2f_b}{4 \sin \alpha}, & f_7 &= -f_8 = \frac{f_a - 2f_b}{4 \sin \alpha}, \\ f_9 &= -f_{10} = f_{11} = -f_{12} = \frac{f_a + 2f_b}{4 \sin \alpha}, & f_{13} &= -(3f_a + 2f_b) \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha}, \\ f_{14} &= 2f_{15} = -(f_a + 2f_b) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Nyní již zbytek dopočteme pro  $\alpha = \pi/3$

Pokud je tank na 1. dílu je  $f_b = 0$  a  $f_a = mgx/l$ , kde  $l$  je délka jednoho dolního dílu a  $x$  je vzdálenost tanku od kraje. Dosadíme a nalezneme, ve které tyči je tlak nejvyšší. Je to pro  $x = l$  v dílu 5, 13 a 6, kde

$$|f_6| = |f_5| = |f_{13}| = \frac{\sqrt{3}}{2} mg.$$

Když je tank na 2. dílu je  $f_a = mg(2l - x)/l$  a  $f_b = mg(x - l)/l$ . Zde je maximální hodnota pro  $x = 2l$  a to v dílu 14

$$|f_{14}| = \frac{2\sqrt{3}}{3} mg.$$

Je tedy vidět, že nejvíce je zatěžován nosník 14 a to, když je tank uprostřed mostu. A pro maximální hmotnost tanku platí

$$m_{\max} = \frac{\sqrt{3} F_{\max}}{2g},$$

kde  $F_{\max}$  je maximální síla, kterou nosník vydrží.

**Karel Honzl**

kaja@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha III.3 ... praktikum II** (4 body; průměr 1,00; řešilo 19 studentů)

Ve fyzikálním praktiku dostal organizátor FYKOSu za úkol pomocí tří měření zjistit napětí třech různých zdrojů.

K dispozici má jeden voltmetr následujících vlastností: Jeho systematická chyba je nulová. Náhodná chyba je charakterizována střední kvadratickou odchylkou  $\sigma$  (tj. rozptyl je  $\sigma^2$ ), která je nezávislá na velikosti měřeného napětí.

Poradte organizátorovi, zda a popř. jak lze napětí změřit přesněji než změřením každého zdroje zvlášť. Za míru celkové přesnosti považujte součet rozptylu výsledných hodnot.

Před začátkem výpočtu si ujasněme základní pojmy. Hodnota kterou měříme pomocí voltmetru je *náhodná veličina*. Každá náhodná veličina je plně charakterizována takzvanou *distribuční funkcí*. Tato funkce udává, s jakou pravděpodobností naměříme jednotlivé výsledky (přesně řečeno, pokud označíme distribuční funkci  $f$ , pak pravděpodobnost toho, že naměřená hodnota (například napětí) bude ležet v úzkém intervalu hodnot  $(U, U + dU)$  bude  $p = f(U) dU$ ). Náhodnou veličinu však můžeme popsat i jednodušeji (na úkor částečné ztráty informace o této veličině) pomocí takzvané *střední hodnoty* a *rozptylu* (takto zjednodušený popis náhodné veličiny můžeme ještě zpřesnit zadáním dalších parametrů, takzvaných *momentů*). Střední hodnota  $\bar{x}$  náhodné veličiny  $x$  je definována jako aritmetický průměr z velmi mnoha naměřených hodnot  $x_i$

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Pokud bychom si nakreslili graf distribuční funkce, udávala by střední hodnota polohu „středu“ tohoto grafu. Rozptyl je definován jako

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Jedná se tedy o aritmetický průměr druhých mocnin rozdílů naměřených hodnot a střední hodnoty. Graf většiny „rozumných“ distribučních funkcí má tvar jakéhosi „hrbu“. Rozptyl náhodné veličiny pak zhruba udává, jaká je druhá mocnina jeho šířky, což můžeme považovat za míru nepřesnosti měření.

V zadání bylo uvedeno, že voltmetr měří napětí s nulovou systematickou chybou a rozptylem  $\sigma^2$ . To znamená, že distribuční funkce naší náhodné veličiny bude mít střední hodnotu rovnou skutečné hodnotě měřeného napětí a rozptyl  $\sigma^2$ .

Změříme-li napětí na několika sériově zapojených zdrojích, musíme napětí na jednotlivých zdrojích z naměřených hodnot dopočítat. Budeme tedy naměřené hodnoty různě sčítat, odečítat a násobit konstantami (řešíme soustavu lineárních rovnic).

Je zřejmé, že střední hodnota součtu dvou náhodných veličin (násobku náhodné veličiny číslem) je součtem jejich středních hodnot (násobek střední hodnoty). Dále vidíme, že rozptyl  $c$ -násobku náhodné veličiny bude  $c^2$ -násobkem jejího rozptylu (toto tvrzení plyne například z definice rozptylu, nebo z faktu, že rozptyl je druhou mocninou *šířky* distribuční funkce (distribuční funkce  $c$ -násobku náhodné veličiny bude  $c$ -krát širší).

Otázkou však je, jaký bude rozptyl součtu náhodných veličin. V obecném případě o něm bohužel nedokážeme nic říct. Dá se ale ukázat, že pokud je chyba měření daná velkým počtem náhodných vlivů (a to je v praxi splněno, protože naměřené napětí může ovlivnit všechno od vlhkosti vzduchu, přes pracovní úsilí dělníka který právě o patro výše sbíječkou bourá zeď až

po konstelaci Jupitera se Saturnem), je tvar distribuční funkce měřené veličiny vždy stejný, ať měříme cokoliv a jakýmkoliv způsobem. Je jím takzvaná *Gaussova funkce*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right).$$

O veličině s takovouto distribuční funkcí říkáme, že má *normální* či *Gaussovo* rozdělení. Díky této vlastnosti pak platí, že rozptyl součtu nebo rozdílu dvou naměřených veličin je vždy součet jejich rozptylů (důkaz tohoto tvrzení již není triviální takže ho neuvádíme.) Nyní známe základní pravidla pro počítání s náhodnými veličinami a můžeme tedy přistoupit k vlastnímu výpočtu

Obecné měření si můžeme vyjádřit jako  $u = a_1U_1 + a_2U_2 + a_3U_3$ , kde  $a_i$  nabývá hodnoty  $-1, 0, 1$ , podle toho s jakou polaritou  $1, -1$  je tam zdroj resp. jestli tam vůbec je  $0$ . Taková měření uděláme tři a dopočteme zadané napětí. Abychom nemuseli rozebírat moc možností, tak si uvědomíme některé symetrie, které dají stejný výsledek.

1. Je jedno jestli měříme  $u$ , nebo  $-u$ . Protože mají stejný rozptyl.
2. Když změním polaritu jednoho zdroje u všech měřených obvodů (např.  $U_1$ ). Tak se změní jenom celkové znaménko ve vyjádření napětí tohoto zdroje  $U'_1 = -U_1$ , což neovlivní výsledný rozptyl napětí tohoto zdroje.
3. Dále využijeme, že záměna jednotlivých měření dá stejný výsledek. Stejně i záměna v označení zdrojů jenom prohodí výsledky, ale celkové hodnoty budou stejné.

Teď se můžeme pustit do samotné analýzy. Rozdělíme si to na možnosti podle počtu zapojených zdrojů. Uvažujeme, že když měříme na jednom zdroji, nedostaneme lepší výsledek. Proto musíme naměřit minimálně dva zdroje.

1. Máme 2 zdroje. Tady ještě musím rozdělit dvě možnosti, podle toho kolikrát se tam zdroje vyskytují
  - a) Jeden zdroj je na všech bůno<sup>1</sup>  $U_1$ . Přitom víme, že je tam  $2 \times 3$  zdrojů, takže ještě tam musí být jeden zdroj 2-krát (bůno  $U_2$ ) a jeden jednou (bůno  $U_3$ ). Jediná možnost lineární nezávislá možnost je (až na změnu znamének u  $U$ )

$$(U_1 + U_2, U_1 - U_2, U_1 + U_3).$$

- b) Každý je tam dvakrát.

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_2 + U_3).$$

Rozmyslete si, že ostatní možnosti jsou ekvivalentní.

2. V prvních dvou měřeních máme 2 a při posledním 3 zdroje. Uvažujme, že při prvním měření máme bůno  $U_1 + U_2$ . Potom na druhém máme 2 možnosti.
  - a) Stejně zdroje jako u 1. měření ( $U_1, U_2$ ). Z lineární nezávislosti dostaneme

$$(U_1 + U_2, U_1 - U_2, U_1 + U_2 + U_3),$$

na znaménku  $U_3$  díky symetriím nezávisí.

---

<sup>1)</sup> bez újmy na obecnosti

b) Zdroj  $U_1$  je u obou a ostatní se liší. Tady dostaneme pro 3 měření tři možnosti

$$\begin{aligned}(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 + U_2 + U_3), \\ (U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 + U_2 - U_3), \\ (U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).\end{aligned}$$

3. V prvním měření jsou dva zdroje, v ostatních dvou 3. V prvním uvažujme buď  $U_1 + U_2$ . Potom můžeme rozlišit dvě možnosti podle polarit y zdroje  $U_2$  (nás zajímá jenom relativní změna oproti  $U_1 + U_2$  a jedno, který zvolíme, protože celkové znaménko můžeme otočit).

a) Stejná polarita, potom v druhém měření máme  $U_1 + U_2 + U_3$ , u třetího potom dostaneme z lineární nezávislosti

$$\begin{aligned}(U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 + U_3), \\ (U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 + U_3), \\ (U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).\end{aligned}$$

b) Různá polarita (potom už můžeme stejnou polaritu uvažovat u třetího měřáku, protože ostatní možnosti jsme vyloučili v bodě a). Potom zůstane jenom jedna lineárně nezávislá možnost

$$(U_1 + U_2, U_1 - U_2 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

4. Ve všech měřeních jsou 3 zdroje. Potom zůstane díky symetriím 1 možnost.

$$(U_1 + U_2 + U_3, U_1 + U_2 - U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

Ted' musíme pro každou možnost vyřešit soustavu a najít vyjádření napětí zdrojů. Pro ně spočteme rozptyl  $U = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$  podle vzorce,  $\sigma_U^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\sigma^2$ . A výsledně sečteme  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ . Nejmenší hodnotu dostaneme pro 3b.

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3, \\ U_2 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_3, \\ U_3 &= \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3,\end{aligned}$$

kde jsme  $u_i$  označili  $i$ -tém měření. Dostaneme  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 3/8$  a  $\sigma_3^2 = 1/2$ .

*Pavel Augustinský*  
pavel@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha III.4 ... rychlá smrt** (4 body; průměr 1,56; řešilo 18 studentů)

V modulu Apollo letí astronauti na Měsíc, skrz okno jim proletí meteorit a udělá v něm díрку o poloměru  $r = 1$  mm. Jak se bude měnit teplota a tlak v kabině o objemu  $V = 60$  m<sup>3</sup>, pokud původní podmínky jsou  $t = 20^\circ\text{C}$  a normální tlak. Jako bonus se pokuste odhadnout, za jak dlouho začnou mít astronauti vážné problémy.

Na řešení této úlohy se dá vysvětlit hned několik důležitých poznatků z molekulové fyziky a termodynamiky. Proto se nelekejte, že je poněkud delší než je obvyklé.

Jako v téměř každé fyzikální úloze i zde se nejprve zabývejme zjednodušujícími předpoklady, bez kterých bychom úlohu neuměli vyřešit. Předně budeme plyn v modulu považovat za ideální. Dále předpokládáme, že všechny děje jsou rovnovážné, tj. v každém okamžiku můžeme systém popsat zákony, které platí pro plyn v termodynamické rovnováze (např. stavovou rovnicí). A konečně vakuum vně modulu považujeme za dokonalé.

Plyn z modulu uniká proti nulovému tlaku, nekoná tedy žádnou práci. Nedochází ani k tepelným výměnám s okolím, neboť okolím je vakuum. Proto se podle prvního termodynamického zákona nemění ani vnitřní energie plynu jako celku (včetně toho, co unikl). Víme ale, že vnitřní energie ideálního plynu závisí pouze na počtu částic  $N$  a termodynamické teplotě  $T$  a to na obojím lineárně

$$U = \frac{5}{2}NkT,$$

kde  $5/2$  je faktor pro dvouatomové molekuly plynu a  $k$  je Boltzmanova konstanta. Proto nemění-li se vnitřní energie plynu, nemění se ani jeho teplota.

Někdo by ale mohl začít šťourat a ptát se, odkud víme, že průměrná energie připadající jedné uniknuvší molekule je stejná jako energie připadající na jednu molekulu, která zůstane. Je pravda, že toto jsme ještě pořádně nezdůvodnili. Uděláme to vzápětí po odvození vztahu pro počet molekul, které uniknou z modulu za element času  $\Delta t$ .

Ze samotných principů statistické fyziky, která popisuje chování mnohačasticových systémů, plyne vztah pro rozdělení částic v ideálním plynu podle velikosti rychlosti. Platí, že pravděpodobnost, se kterou se vybraná molekula o hmotnosti  $m$  ideálního plynu pohybuje rychlostí o velikosti v intervalu  $(v, v + dv)$ , je

$$g(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) dv. \quad (3)$$

Tomuto vztahu se říká *Maxwellovo-Boltzmanovo rozdělení rychlostí*. Po chvilce integrování se dá spočítat, že střední resp. střední kvadratická rychlost molekuly plynu je

$$\bar{v} = \int_0^\infty v g(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad \overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 g(v) dv = \frac{3kT}{m}.$$

Počítejme nyní, kolik molekul unikne z modulu za čas  $\Delta t$  infinitezimálně malým otvorem o ploše  $\Delta S$ . Následující odstavec je založen na znalosti poněkud pokročilejší matematiky, pokud mu nerozumíte, spokojte se s výsledným vztahem (5), který je pochopitelný intuitivně až na faktor  $1/4$ . Vezměme  $\Delta t$  mnohem menší než je průměrný čas mezi dvěma srážkami jedné molekuly s jinými. Díky tomu můžeme předpokládat, že v časovém intervalu  $(0, \Delta t)$  nedochází k žádným srážkám. Zvolme systém sférických souřadnic tak, že osa  $z$  vede kolmo na otvor. Od osy  $z$  určujeme úhel  $\vartheta$  a od libovolného směru v rovině  $z = 0$  určujeme úhel  $\varphi$ . Omezme se zatím jen na molekuly pohybující se rychlostí mezi  $(v, v + dv)$ . Z bodu A o souřadnicích



$(r, \vartheta, \varphi)$  molekula otvorem unikne, pokud  $v\Delta t > r$  a pokud letí do správného prostorového úhlu. Prostorový úhel, pod kterým je ploška  $\Delta S$  vidět z bodu A, je

$$\Delta\Omega = \frac{\cos\vartheta\Delta S}{r^2}.$$

Jelikož z okolí bodu A letí do každého směru stejně molekul, letí vybraná molekula do směru  $\Delta\Omega$  s pravděpodobností  $\Delta\Omega/4\pi$ . Z geometrických úvah si odvodte, že objem oblasti, jejíž body mají souřadnice mezi  $(r, r+dr)$ ,  $(\varphi, \varphi+d\varphi)$ ,  $(\vartheta, \vartheta+d\vartheta)$  je  $dV = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$ . Označíme-li ještě  $\rho_v$  objemovou hustotu počtu molekul, můžeme napsat, že za čas  $\Delta t$  unikne ploškou  $\Delta S$  z modulu  $dN(v)$  molekul, jejichž rychlost má velikost mezi  $(v, v+dv)$ .

$$dN(v) = \int_0^{v\Delta t} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\Delta S \cos\vartheta}{4\pi r^2} g(v) dv \rho_v r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr = \frac{1}{4} \Delta S \Delta t \rho_v g(v) v dv. \quad (4)$$

Integrovali jsme přes element objemu  $dV$ ,  $g(v)$  je hustota pravděpodobnosti ze vztahu (3). Nezávisle na rychlosti tedy unikne

$$\Delta N = \int_0^\infty dN(v) = \frac{1}{4} \Delta S \Delta t \rho_v \int_0^\infty g(v) v dv = \frac{1}{4} \Delta S \Delta t \rho_v \bar{v}.$$

Celou plochou  $S$  tedy za malý čas  $\Delta t$  unikne z modulu

$$\Delta N = \frac{1}{4} S \Delta t \rho_v \bar{v} \quad (5)$$

molekul. Hustota  $\rho_v$  molekul se samozřejmě mění s časem. Střední rychlost molekul v plynu  $\bar{v}$  na čase nezávisí, nezávisí-li na čase teplota plynu. To ukažme v následujícím odstavci.

Jak jsme řekli výše, potřebujeme ukázat, že průměrná energie připadající jedné uniknuvší molekule je stejná jako energie připadající na jednu molekulu, která zůstane. Víme, že energie molekuly je úměrná kvadrátu její rychlosti  $E \sim v^2$ , resp.  $dE \sim v dv$ . Proto podle vztahu (4) a (3) můžeme psát, že počet uniknuvších molekul s energií mezi  $(E_1, E_1 + dE)$  je

$$dN(E_1) = c_1 E_1 e^{c_2 E_1} dE,$$

$c_1, c_2$  jsou nedůležité konstanty. Poměr počtu uniknuvších molekul o energiích  $E_1$  a  $E_2$  bude

$$\frac{dN(E_1)}{dN(E_2)} = \frac{E_1 e^{c_2 E_1}}{E_2 e^{c_2 E_2}},$$

což je přesně poměr počtu molekul o energiích  $E_1$  a  $E_2$  v plynu, tudíž je i stejné rozložení počtu molekul podle energie, resp. rychlosti. A to je přesně to, co jsme potřebovali dokázat, abychom přesvědčili každého, že pokud je v modulu ideální plyn, jeho teplota se bude zachovávat. U reálného plynu nezávisí vnitřní energie pouze na teplotě, tudíž by vše bylo složitější a ukázalo by se, že u reálného plynu by se teplota měnila.

Vraťme se k výpočtu závislosti tlaku na čase. Využijeme stavovou rovnici ideálního plynu  $pV = NkT$  a vztah (5), tedy

$$dp = -\frac{kT}{V} dN = -\frac{kT}{V} \frac{1}{4} S \rho_v \bar{v} dt = -\frac{S\bar{v}}{4V} p dt.$$

Kromě času a tlaku jsou v této rovnici samé konstanty, tudíž postupem vysvětleným v minulém díle seriálu dostaneme pro tlak a zadané hodnoty

$$p = p_0 e^{-\frac{Sv}{4V}t} = p_0 e^{6,06 \cdot 10^{-6} \{t\}}.$$

Pokusme se zodpovědět otázku, kdy začnou mít kosmonauti problémy. Na vysokých horách je asi poloviční atmosférický tlak a i trénovaný člověk většinou potřebuje dýchací přístroj. V modulu tlak na polovinu klesne asi za 31 hodin. Tudíž mají kosmonauti spoustu času na ucpání dírky nebo nasazení dýchacích přístrojů.

A závěrem několik poučných poznámek k vašim řešením. Někteří z vás neodvozovali vztah (5) tak pečlivě jako my a po vzoru odvození tlaku působícího na stěny nádoby v plynu napsali

$$\Delta N = \frac{1}{6} S \Delta t \rho_v \sqrt{\bar{v}^2}.$$

V tomto případě je ale správně námi získaný vztah. Sami se podívejte do středoškolských učebnic a srovnajte, kde se u odvození tlaku vezme šestina místo čtvrtiny a střední kvadratická rychlost místo střední rychlosti.

Také se objevilo nemálo řešitelů, kteří výtokovou rychlost spočítali z Bernoulliho rovnice jako  $v = \sqrt{2\pi/\rho} = \sqrt{2kT/m}$ , to je vztah formálně opět velmi podobný našemu  $v = \bar{v}/4 = \sqrt{kT/2\pi m}$ , nicméně není správný, neboť Bernoulliho rovnice platí pouze pro nestlačitelné kontinuum, což ideální plyn rozhodně není.

**Lenka Zdeborová**  
lenka@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha III. P ... velikost elementárních částic** (4 body; průměr 2,45; řešilo 29 studentů)

- a) *Elektrostatická energie rovnoměrně nabitě koule je  $E = (3Q^2)/(20\pi\epsilon_0 R)$ . Pokud to dokážete, ověřte tento vztah výpočtem, jinak řešte rovnou úkol b).*
  - b) *Pomocí tohoto vztahu se pokuste ze znalosti klidové energie protonu a elektronu spočítat rozměr těchto částic.*
  - c) *Rozmyslete, proč je tento postup zcela nesmyslný. Pozn.: experimentálně je ověřeno, že rozměr elektronu je menší než  $10^{-19}$  m.*
- a) *Energii nabitě koule se spočítá z představy, že celý náboj je v nekonečnu a my ho na kouli přitáhneme. Náboj budeme tahat postupně v kulových slupkách. Práce potřebná na přidání slupky ve vzdálenosti  $r$  je*

$$dW = \varphi dQ,$$

kde  $\varphi$  je potenciál koule v této vzdálenosti. Nabitá koule se z vnějšku chová jako bodový náboj.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0},$$

kde  $\epsilon_0$  je permitivita vakua a za  $Q$  jsme dosadili vyjádření pomocí hustoty náboje  $Q = 4\pi r^2 \rho/3$ . Zdiferencováním pro  $dQ$  potom dostaneme  $dQ = 4\pi \rho r^2 dr$ . Po dosazení získáme pro práci

$$dW = \frac{4\pi \rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0}.$$

Výsledná energie je práce na přenesení všech slupek

$$E = \int_0^R \frac{4\pi \rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr = \frac{4\pi \rho^2 R^5}{15\epsilon_0}.$$

Vyjádřením hustoty pomocí celkového náboje dostaneme výsledný vztah.

$$E = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}. \quad (6)$$

b) Za energii dosadíme ze známého Einsteinova vztahu

$$E_e = m_e c^2 = 510 \text{ keV} = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J},$$

$$E_p = m_p c^2 = 940 \text{ MeV} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ J},$$

kde  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-16} \text{ J}$ . Tato jednotka se často používá právě v částicové fyzice. Dosažením do rovnice (6), dostaneme výrazy pro vzdálenost

$$R_e = 1,68 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

$$R_p = 9,2 \cdot 10^{-19} \text{ m}.$$

c) Jsou dva závažnější důvody, proč celý postup zavrhnout. První je ten, že rovnice pro energii a potenciál, které jsme použili, nemusí platit pro tak malé vzdálenosti. Rovnice pro potenciál totiž vycházejí z Maxwellových rovnic (tyto se dají zjednodušit pro elektrostatický případ do potenciálového tvaru), které jsou ale klasickými zákony a vyžadují přesnou znalost polohy a energie (dá se přímo spočítat z hybnosti), což je ale v rozporu s kvantovou teorií — principem neurčitosti. Když vezmeme neurčitost v poloze pro elektron  $\Delta x_e = 10^{-15} \text{ m}$ , z toho pro hybnost  $\Delta p_e = \hbar/\Delta x_e = 10^{-19} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , z toho energie  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \sim pc = 10^{-11} \text{ J}$ , což je mnohem větší než energie  $E_e$ . Pro proton uvažujeme stejně.

Ve skutečnosti se dají Maxwellovy rovnice jaksi zobecnit tím, že jejich tvar nezměníme, ale změni se interpretace členů vystupujících v těchto rovnicích. Energie si však přibližně zachová výše uvedenou podobu. Ale tady taky narazíme na problém, protože na těchto vzdálenostech už máme dostatečnou energii na zrod nových elektronů a pozitronů. Toto všechno platí, ale jenom pro elektron, v případě protonů tu vystupují ještě jaderné síly (silné interakce). Závěrem možno dodat, že jsme aspoň stanovili meze platnosti klasické teorie elektromagnetického pole.

Druhým závažným problémem je to, že neznáme sílu která by takovýto objekt udržela pohromadě.

Nakonec bychom chtěli upozornit, že vzorec  $E = mc^2$  platí pro všechny druhy energie, nejen pro kinetickou. Což se projeví například tím, že hélium má menší hmotnost než proton s neutronem. A tento rozdíl odpovídá právě vazbové energii. Někteří z vás by možná namítli, že odkud je potom hmotnost neutronu když nemá náboj, ale tady hmotnost tvoří silné interakce, které drží pohromadě kvarky.

*Miro Kladiva*

miro@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha III. E ... balónek** (8 bodů; průměr 5,79; řešilo 24 studentů)

Změřte tlak vzduchu, který je při nafukování uvnitř balónku těsně před tím, než balónek praskne. Alespoň jednu metodu zrealizujte a několik dalších navrhňte. Nezapomeňte uvést typ použitých „balónků“.

**Postupy**

Představíme si niekoľko možných postupov merania, na ktoré prišli riešitelia. Objavili sa dva postupy: vodný a vzduchový.

- a) U vodného postupu sa naplňal balónek vodou. Táto metóda v sebe skrýva zradu. Niektorí riešitelia navrhovali nasledujúci postup. Plniť balónek vodou až do prasknutia a nejaký spôsobom v ňom merať tlak. Týmto postupom je možné merať iba tlak, ktorý vyvinú steny balónika. Balónek sa deformuje a voda napína steny veľmi nerovnomerne, nakoniec praskne preto, lebo stena nevydrží napínanie. Tento tlak možno odmerať, alebo ho stotožniť s hydrostatickým tlakom, ale tento tlak je oveľa menší ako pri nafukovaní vzduchom. Správnejší postup by bolo naplniť balónek vodou tak, aby mal svoj charakteristický tvar, ale ešte nebol na prasknutie. Potom ho stláčať a ľubovoľným spôsobom merať tlak. Dosiahnuté maximum pri prasknutí zaznamenať.
- b) Pri vzduchovom spôsobe ste plnili balónek plynom. Jediným orieškom bolo meranie tlaku. Nie každý mal tlakomer priemyselnej výroby, preto ste vy, šikovní Fykosáci, prišli na niekoľko vskutku zaujímavých možností, ako merať tlak.
- Dobrý nápad bol využiť tlakomer na benzínovej pumpe, kde je k dispozícii aj kompresor.
  - Pripevniť k balóniku ortuťový (vodný) tlakomer na báze trubice v tvare U a merať rozdiel výšok.
  - Pripevniť sklenenú trubicu na konci uzatvorenú so vzduchovou bublinou oddelenou od ostatných častí kvapalinou. Potom stačí merať dĺžku posunutia deliacej kvapaliny a podľa Boylovho-Mariottovho zákona spočítať tlak.
  - Položiť na balónek priehľadnú dosku, ktorú zaťažujeme závažiami a meriame stykovú plochu dosky s balónikom. Tlak sa spočíta podľa definície ako podiel sily a plochy.
  - Tlačiť vzduch do balónika piestom o známej ploche a silomerom merať akou silou tlačíme.
  - Vezmeme pumpičku, ktorá má spätnú poistku. Odmeriame objem vzduchu jedného stlačenia, napríklad ponorením balónika pod vodu v ociachovanej nádobe a  $n$ -krát stlačíme pumpičku. Potom uvidíme, aký objem sme nafúkali. Urobme zjednodušenie, že vzduch je ideálny plyn a pumpujeme pomaly, takže dej bude izotermický. Označme  $V_p$  objem vzduchu vytlačeného pumpičkou na jedno stlačenie. Pumpu stlačíme  $k$ -krát. Jedným stlačením podľa stavovej rovnice pridáme do balónika látkové množstvo  $n_p = p_a V_p / RT$ . Balónek praskne pri tlaku  $p_{ex} = kn_p RT / V_{ex}$ . Po dosadení  $p_{ex} = kp_a V_p / V_{ex}$ .<sup>2</sup> Potom stačí odmerať objem pri explózii. Ak máme dostatok experimentálneho materiálu rovnakej kvality, tak objem pri prasknutí  $V_{ex}$  môžeme odhadnúť aproximovaním tvaru balónika guľou a valcom a odmerať rozmery pred prasknutím. Rozmery sa pred prasknutím menia málo. Liatím vody do balónika do prasknutia môžeme dostať zcestný výsledok, už so spomínaných príčin. Bohužiaľ tento výpočet, podľa vašich meraní, dáva rádovo väčší tlak.

<sup>2)</sup> Riešenie Pavla Hály

## Meranie

Pomocou Karla Honzla sme merali nasledovne. Plnili sme balónik vodou cez priehľadnú trubicu a merali sme, do akej výšky vystúpila voda. Voda vystúpila do výšky zhruba 40 cm, čo je podľa vzťahu  $p = h\rho g$  cca 4 kPa. Tento tlak je spôsobený iba protitlakom stien balónika (viď vyššie). Po naplnení do polovičnej veľkosti oproti stavu pri prasknutí sme tlačili na balónik hrcnom. Voda vystúpila dosť vysoko, a pretože strop máme vysoký tak 2 m, tak niesme schopní takto merať tlaky nad 20 kPa. Jeden balónik pukol pri tlaku 15 kPa. Bol jediný, ktorý sme dokázali takto prasknúť. Problém bol potom zatlačiť dostatočne silno, aby balónik praskol. Riešiteľmi zmeraná hodnoverná hodnota tlaku pri prasknutí je od 8 kPa do 15 kPa.

*Laďo Michnovič*

lado@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha III. S ... integrály** (4 body; průměr 3,38; řešilo 29 studentů)

a) Spočítejte integrály funkcí  $y = x^2 e^x$ ,

b)  $y = \sin^3 x \cos^2 x$ .

c) Určete obsah obrazce, který je ohraničen funkcemi  $y_1 = \sqrt{|x|} + \sqrt{1 - |x|}$ ,  $y_2 = \sqrt{|x|} - \sqrt{1 - |x|}$ . Tento obrazec nakreslete.

a) Budeme integrovat dvakrát *per-partes*, abychom se zbavili funkce  $x^2$  před  $e^x$

$$F(x) = x^2, \quad f(x) = 2x,$$

$$g(x) = e^x, \quad G(x) = e^x,$$

$$I_1 = \int x^2 e^x dx = \int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx, \quad (7)$$

zintegrujeme podruhé *per-partes*

$$I_1 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Relativně dost řešitelů nenapsala konstantu na konec výrazu. Primitivní funkce k dané funkci není jen jedna, ale hned několik – tedy lépe řečeno nekonečně mnoho. A dále spousta řešitelů psala konstanty, kde nemusí být – tak pro pořádek – když provádíme substituci, k funkci  $g$  jsme hledali primitivní funkci, k integraci *per-partes* ale nepotřebujeme všechny primitivní funkce, ale stačí nám pouze jedna, proto zde konstantu nepíšeme. Ve výrazu (7) také nemusíme psát konstantu, protože ta je *schována* v druhém integrálu.

b) Funkce je *lichá* v sinu a proto nejvýhodnější je použít substituci  $y = \cos x$ . potom  $dy = -\sin x dx$ . Ještě ověříme, že substituce je definovaná na definičním oboru integrálu a všude má vlastní derivaci, což u cosinu je splněno. Pak už můžeme psát

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \sin^3 x \cos^2 x dx = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x (-\sin x) dx = \\ &= - \int (1 - y^2)y^2 dy = \int y^4 dy - \int y^2 dy = \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + C, \end{aligned}$$

a ještě musíme zpátky dosadit substituci

$$I_2 = \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

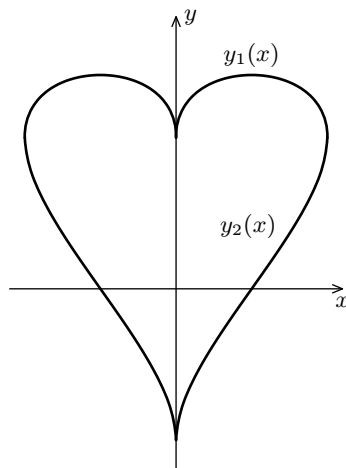
- c) Nejprve zjistíme definiční obor funkcí  $D_y = \langle -1; 1 \rangle$ . Funkce jsou sudé, a tedy plochu nemusíme počítat jako dva integrály, celková plocha bude dvojnásobek plochy mezi funkcemi na intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ .

Obsah plochy mezi dvěma funkcemi se spočítá jako určitý integrál  $\int_a^b |y_1(x) - y_2(x)|$ . Snadno pak ověříme, že  $y_1$  je na celém svém definičním oboru větší než  $y_2$  a proto můžeme počítat

$$S = 2 \int_0^1 (y_1(x) - y_2(x)) dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{|x|} + \sqrt{1-|x|} - \sqrt{|x|} - \sqrt{1-|x|}) dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x} dx.$$

Zavedeme substituci  $z = 1 - x$ ,  $dz = -dx$ , musíme ale také změnit meze určitého integrálu

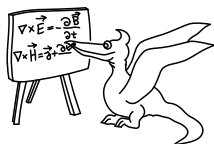
$$S = -4 \int_1^0 z^{1/2} dz = 4 \int_0^1 z^{1/2} dz = 4 \left[ \frac{2}{3} z^{3/2} \right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$



Obr. 4. Graf zadných funkcí

**Honza Pacák**

paci@fykos.mff.cuni.cz



## Seriál na pokračování

### Kapitola 5: Lineární algebra

Narozdíl od předcházejících dílů, jejichž výsledky byly přímočaře aplikovatelné na řešení fyzikálních problémů, bude matematický aparát probraný v tomto díle o něco abstraktnější. Zdůrazněme také, že v tomto díle se kvůli zjednodušení výkladu dopustíme ještě více nepřesností než v dílech předcházejících.

Zavedme nyní takzvaný *lineární vektorový prostor* (zkráceně vektorový prostor či jen prostor). Vektorový prostor je množina prvků, takzvaných *vektorů* (význam pojmu vektor je mnohem obecnější, než jen orientovaná úsečka v našem trojrozměrném euklidovském prostoru), na které jsou definovány operace sčítání dvou vektorů a násobení vektoru číslem. Pro vektorový prostor musí dále platit, že součet libovolných dvou prvků a násobek libovolného prvku číslem je opět prvkem tohoto prostoru - říkáme, že vektorový prostor je uzavřený vůči operaci sčítání a násobení. Na vektorové prostory jsou kladeny ještě další podmínky, které ale nejsou příliš důležité a ve většině případů jsou splněny.

Jednoduchým příkladem takového prostoru je „náš“ trojrozměrný prostor. Vektory jsou v tomto případě všem známé „špičky“, sčítání a násobení je definováno po složkách a to, že součet dvou vektorů či násobek vektoru číslem leží opět v tomto prostoru, je jasné (z definice vektorového prostoru ale vidíme, že pokud bychom tento prostor rozdělili například na dva „menší prostory“ rovinou procházející počátkem souřadné soustavy, pak by tyto prostory díky neuzavřenosti na násobení zápornými čísly nebyly vektorovými prostory). Tento prostor je standardně označován  $\mathbb{E}^3$ . Jiným příkladem vektorového prostoru je množina všech polynomů nejvýše  $n$ -tého stupně (polynomem  $n$ -tého stupně rozumíme funkci  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , kde  $a_k$  jsou konstanty). Polynomy můžeme jednoduše sčítat i násobit číslem a výsledek těchto operací je opět polynom nejvýše  $n$ -tého stupně (příklad pro  $n = 2$ , součet vektorů  $v_1 = 3x^2 - 4x + 5$  a  $v_2 = -3x^2 + 2$  je  $v_1 + v_2 = -4x + 7$ ). Jako poslední příklad uveďme vektorový prostor uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel (sčítání a násobení je definováno po složkách). Takovýto prostor bývá standardně označován jako  $\mathbb{R}^n$ . Jako cvičení vymyslete další příklady vektorových prostorů.

Pro další výklad budeme potřebovat následující pojmy. *Lineární kombinací* vektorů  $v_1, \dots, v_k$  budeme rozumět výraz  $\sum_{i=1}^k a_i v_i$ , kde  $a_i$  jsou čísla, takzvané koeficienty lineární kombinace (lineární kombinace vektorů je opět vektor). O vektorech  $v_1, \dots, v_n$  řekneme, že jsou *lineárně nezávislé*, pokud nelze žádný z těchto vektorů vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních (tedy pokud je nějaká lineární kombinace všech těchto vektorů nulová, pak musí být nulové všechny její koeficienty).

Dalším důležitým pojmem je *báze vektorového prostoru*. Z každého vektorového prostoru  $V$  můžeme vždy vybrat několik vektorů  $v_1, \dots, v_n$  tak, aby se dal libovolný vektor tohoto prostoru vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Pokud jsou vektory  $v_1, \dots, v_n$  navíc lineárně nezávislé, řekneme, že tvoří bázi prostoru  $V$ . Například za bázi „našeho“ trojrozměrného prostoru můžeme zvolit tři vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  délky jedna, rovnoběžné se souřadnými osami kartézské souřadné soustavy. V případě prostoru polynomů nejvýše třetího stupně budou bázi například funkce  $x^3, x^2, x, 1$  ale můžeme zvolit i jinou bázi jako  $x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1, 1$  (ověřte, že tyto funkce splňují požadavky kladené na bázi).

Počet prvků báze pak udává takzvanou *dimenzi* vektorového prostoru (podle takzvaného Steinitzova lemmatu má každá báze vektorového prostoru stejný počet prvků). Tedy například „náš“ prostor má dimenzi 3 a prostor polynomů nejvýše třetího stupně má dimenzi 4 a prostor všech pětic reálných čísel má dimenzi 5. (Na prostorech dimenze vyšší než 3 není vůbec nic „mystického“. Nemusíte si je nijak představovat, stačí, když víme jak s nimi počítat). Každý vektor z  $n$ -dimenzionálního prostoru tedy můžeme popsat  $n$ -tíci čísel představujících koeficienty u jednotlivých prvků báze (díky tomu jsou všechny prostory o stejné dimenzi jistým způsobem ekvivalentní). Těmto číslům říkáme složky či souřadnice vektoru v dané bázi.

Na některých vektorových prostorech můžeme zavést takzvaný *skalární součin*. Skalární součin je zobrazení, které dvojici vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z prostoru  $V$  přiřadí číslo (značíme  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ) a splňuje následující podmínky

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z},$$

$$(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}},$$

$$(\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$$

(pruhem zde značíme komplexní sdružení-na reálných prostorech je tedy skalární součin komutativní). Například na „našem“ prostoru můžeme skalární součin dvou vektorů zadaných v kartézské bázi spočítat jako  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ , kde  $a_i, b_i$  jsou jejich souřadnice. Na prostoru  $\mathbb{R}^n$  se pak skalární součin počítá jako  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ , kde  $a_i, b_i$  jsou souřadnice násobených vektorů v bázi tvořené vektory  $(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), (0, 0, 1, \dots), \dots$ . Možností jak definovat skalární součin máme více, ale všechny jsou jistým způsobem ekvivalentní. Dodejme ještě, že délku (jinak normu) vektoru můžeme spočítat jako  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ .

Věnujme nyní pozornost *lineárním zobrazením* (jinak *lineárním operátorům*) na vektorovém prostoru  $V$ . Lineární zobrazení  $A$  na prostoru  $V$  je zobrazení, které každému vektoru  $x_1 \in V$  přiřadí vektor  $x_2 \in V$  (píšeme  $A : V \rightarrow V$ ) a splňuje následující podmínky

$$(\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad A(\alpha x) = \alpha A(x), \quad (8)$$

$$(\forall x_1, x_2 \in V) \quad A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2). \quad (9)$$

Zvolíme-li na prostoru  $V$  nějakou bázi, bude každý vektor popsán  $n$ -tíci čísel (souřadnic). Dá se ukázat, že každé lineární zobrazení se dá popsat pomocí  $n^2$  čísel  $A_{ij}$ , kde  $i, j = 1, \dots, n$  (jejich hodnoty závisí na volbě báze) tak, že souřadnice vzoru  $a_1, \dots, a_n$  a obrazu  $b_1, \dots, b_n$  jsou svázány vztahem

$$b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} a_j. \quad (10)$$

Veličiny  $A_{ij}$ , kde  $i, j = 1, \dots, n$  nazýváme *matice* a zapisujeme je do čtvercové tabulky tak, že hodnota  $a_{nm}$  je zapsána v  $n$ -tém řádku a  $m$ -tém sloupci. Například matici  $A_{11} = 1, A_{12} = -2, A_{21} = 2, A_{22} = 3$  zapíšeme jako

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Souřadnice vektoru pak obvykle zapisujeme do sloupce. Výsledek působení zobrazení  $A$  na vektor  $\mathbf{a}$  spočítáme podle (10), což v tomto druhu značení znamená, že  $i$ -tou souřadnici výsledku získáme „skalárním vynásobením“  $i$ -tého řádku matice s vektorem  $\mathbf{a}$  (nejedná se skutečný skalární součin, ale formálně vypadají tyto operace stejně). Takovýto proces pak nazýváme násobení matice vektorem. Například součin matice (11) s vektorem o souřadnicích  $(-5, 6)$  bude (při násobení zapisujeme vektor na pravou stranu matice)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) \\ -5 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Stejně jako vektory můžeme i matice sčítat a násobit čísly. Sčítání matic a násobení matice číslem je definováno po složkách, tedy například

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

To, že je rozumné definovat tyto operace právě takto, můžeme odůvodnit tím, že součet matic  $A$  a  $B$  odpovídajících zobrazením  $Z_A$  a  $Z_B$  je díky této definici matice odpovídající zobrazení



$Z_A + Z_B$ , což je výsledek, který od sčítání matic „očekáváme“ (ověřte). Matice však můžeme také násobit. Součin dvou matic  $A, B$  je definován jako

$$C_{kj} = \sum_i A_{ki} B_{ij} \quad (15)$$

(součin dvou matic je opět matice). Tato definice je motivována tím, že požadujeme aby součin dvou matic byla matice odpovídající složení příslušných zobrazení. Skutečně, můžeme psát

$$\beta_k = \sum_i A_{ki} \left( \sum_j B_{ij} \alpha_j \right) = \sum_j \left( \sum_i A_{ki} B_{ij} \right) \alpha_j. \quad (16)$$

Odtud vidíme, že postupné násobení vektoru  $\mathbf{a}$  maticemi  $B$  a  $A$  je ekvivalentní jeho vynásobení jednou maticí  $C$  danou vzorcem (15).

Zapišeme-li násobené matice  $A, B$  jako tabulky, získáme prvek ležící na  $n$ -tém řádku a  $m$ -tém sloupci jejich součinu tak, že „skalárně vynásobíme“  $n$ -tý řádek  $A$  s  $m$ -tým řádkem  $B$  (poloha maticového elementu který tímto způsobem spočítáme je stejná jako poloha průsečíku příslušného řádku a sloupce). Raději než definici (15) si zapamatujte pravidlo „řádek krát sloupec“ (které se velmi podobá pravidlu pro násobení matice a vektoru). Jako cvičení ověřte následující rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 & 9 \\ 10 & 20 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Všimněte si, že matice  $A$  a  $B$  nehrají při jejich násobení stejnou roli (vždy násobíme řádek první matice se sloupcem druhé matice). Díky tomu je násobení matic *nekomutativní*. To znamená, že součin  $AB$  se obecně nerovná součinu  $BA$ . O tom se můžeme přesvědčit na následujícím příkladě (ověřte)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

„Mírou nekomutativity“ dvou matic je jejich *komutátor*. Ten je definován jako  $[A, B] = AB - BA$ . Například komutátor matic z (18) je

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Pokud je komutátor dvou matic nulová matice (všechny její prvky jsou nulové), říkáme, že tyto matice komutují.

Zavedme nyní několik užitečných pojmů. Matice je *regulární*, pokud každý nenulový vektor zobrazí opět na nenulový vektor. V opačném případě říkáme, že je matice *singulární* (analogicky můžeme regularitu definovat takto; matice je regulární pokud je dimenze prostoru obrazů všech vektorů z prostoru  $V$  stejná jako dimenze  $V$ ).

*Jednotková matice* je matice, která pro všechny vektory  $\mathbf{u}$  splňuje vztah  $\mathbb{I}\mathbf{u} = \mathbf{u}$  (kromě symbolu  $\mathbb{I}$  se jednotková matice někdy označuje také jako  $\mathbb{E}$  či  $\mathbf{1}$ ). Jakýkoliv vektor se tedy při

vynásobením jednotkovou maticí nezmění. Jednotková matice vypadá ve všech bázích stejně, a to ( $n$  je dimenze prostoru)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_n$$

Násobení jednotkovou maticí nezmění kromě vektoru ani libovolnou matici (násobení matic je zavedeno tak aby odpovídalo složení dvou zobrazení).

Maticí *inverzní* k matici  $A$  nazýváme takovou matici  $A^{-1}$ , pro kterou platí  $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$ . Matice inverzní k matici  $A$  však neexistuje vždy, ale pouze tehdy, je-li  $A$  regulární. Pro výpočet inverzní matice existuje jednoduchý algoritmus. Vyjdeme z toho, že rovnost  $AB = C$  zůstane zachována, pokud provedeme stejné řádkové úpravy na maticích  $A$  a  $C$  (například přičteme  $n$ -tý řádek matice  $A$  k jejímu  $m$ -tému řádku a zároveň přičteme  $n$ -tý řádek matice  $C$  k jejímu  $m$ -tému řádku, dále můžeme řádky prohazovat a násobit konstantami). Tedy pokud zapíšeme rovnost  $AA^{-1} = \mathbb{I}$ , ( $A$  je zadaná matice) můžeme simultánně upravovat  $A$  a jednotkovou matici na pravé straně za zachování rovnosti. Pokud provádíme tyto úpravy tak, že z matice  $A$  „vyrobíme“ jednotkovou matici, dostáváme  $\mathbb{I}A^{-1} = B$ , kde  $B$  je matice získaná úpravami  $\mathbb{I}$ . Při pohledu na poslední vzorec vidíme, že právě  $B$  je hledaným výsledkem ( $B = \mathbb{I}A^{-1} = A^{-1}$ ). Postup si ukážeme na následujícím příkladě

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Správnost výsledku snadno ověříme vynásobením (provedte)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jako cvičení si vymyslete matici  $3 \times 3$  a invertujte ji (pokud nebude inverze možná, zvolili jste singulární matici).

Řekneme, že matice  $A$  je *symetrická*, pokud platí  $A_{ij} = A_{ji}$ . Pokud platí  $A_{ij} = -A_{ji}$ , řekneme, že  $A$  je *antisymetrická*.

*Transpozici* matice  $A$  rozumíme matici  $A^T$  vzniklou z  $A$  přehozením řádků a sloupců (tedy  $A_{ij} = A_{ji}^T$ ). V „tabulkovém“ zápisu odpovídá transpozici „otočení“ matice okolo její diagonály (diagonální prvky matice jsou ty, které leží na „spojnici“ levého horního a pravého dolního rohu). Symetrická matice se při transpozici nezmění, transpozice antisymetrické matice je ekvivalentní jejímu vynásobení číslem  $-1$ .

Velmi důležité jsou pojmy *vlastní číslo* a *vlastní vektor* matice (je na nich vybudována celá kvantová mechanika). Vlastní vektor matice  $A$  je každý nenulový vektor  $\mathbf{v}$  takový, že platí  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Číslo  $\lambda$  pak říkáme *vlastní číslo* matice  $A$ . Například jednotková matice má jediné vlastní číslo 1 a každý (nenulový) vektor je jejím vlastním vektorem. Naznačme postup výpočtu vlastních čísel. Rovnost  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  jistě zůstane zachována i pokud její pravou stranu vynásobíme jednotkovou maticí. Tím dostáváme  $A\mathbf{v} = \mathbb{I}\lambda\mathbf{v}$ . Dále můžeme tento výraz upravovat takto

$A\mathbf{v} - \lambda\mathbb{I}\mathbf{v} = (A - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v} = 0$ . Hledáme tedy taková  $\lambda$ , pro která je matice  $A - \lambda\mathbb{I}$  singulární (musí zobrazit nenulový vektor  $\mathbf{v}$  na nulový). Matice je singulární právě tehdy, když je nulový její *determinant*. Determinanty se nebudeme blíže zabývat. Uvedme pouze, že se jedná o zobrazení které každé matici přiřadí číslo. Pro matici  $2 \times 2$  ho spočteme jako  $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$  a pro matici  $3$  (podle takzvaného Sarrusova pravidla) jako  $\det A = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32}$ . Díky tvaru determinantu se tak problém hledání vlastních čísel matice  $n \times n$  převede na hledání kořenů polynomu  $n$ -tého stupně. Vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu  $\lambda_i$  pak nalezneme jako prvky jádra matice  $A - \lambda_i\mathbb{I}$ . (Jádro matice je množina všech vektorů, které se působením této matice vynulují (je dalším příkladem vektorového prostoru). Singularita matice  $A - \lambda_i\mathbb{I}$  nám zaručuje to, že jeho dimenze bude alespoň 1).

Na začátku výkladu jsme zdůraznili, že matice odpovídající danému zobrazení vypadá různě v různých bázích. Stručně popišme, jak ze znalosti matice v jedné bázi spočteme její tvar v bázi jiné. Předpokládejme že známe matici  $A$  v bázi tvořené vektory  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  a zajímá nás její vyjádření v bázi  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , přičemž známe vztah svazující vektory staré a nové báze  $\varphi_i = C_{i1}\varepsilon_1 + \dots + C_{in}\varepsilon_n$ . Koeficienty  $C_{ij}$  tvoří takzvanou *matici přechodu* od báze  $\varepsilon_i$  k bázi  $\varphi_i$ . Vektor ve staré bázi  $\mathbf{v}$  pak získáme z vektoru  $\mathbf{v}'$  v bázi nové jako  $\mathbf{v} = C\mathbf{v}'$  (rozmyslete). Nyní můžeme postupovat takto: Vektor  $\mathbf{v}$  v nové bázi můžeme převést do báze staré působením matice  $C$ . Ve staré bázi provedeme lineární zobrazení vynásobením maticí  $A$ . Obdržený výsledek ještě musíme převést zpět do nové báze, což provedeme vynásobením maticí  $C^{-1}$ . Výsledkem je tedy vektor  $C^{-1}AC\mathbf{v}'$ . Odtud vidíme, že matice  $A$  bude mít v nové bázi tvar

$$A' = C^{-1}AC.$$

Říkáme, že matice  $A$  a  $A'$  jsou *podobné*. Jako cvičení si rozmyslete, proč mají podobné matice stejná vlastní čísla a proč vypadá jednotková matice ve všech bázích stejně.

Ukažme si nyní několik jednoduchých aplikací. Pomocí matic můžeme elegantně popsat rotace vektorů v rovině a v („našem“) prostoru (rotace je lineární zobrazení). Začneme popisem rotací v rovině. Pro popis vektorů použijeme kartézský systém souřadnic (tomu odpovídá volba báze tvořené dvěma kolmými vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  délky 1 rovnoběžnými se souřadnými osami). Každý vektor  $\mathbf{v}$  tedy bude popsán souřadnicemi  $x, y$ . Zajímá nás, jaké budou souřadnice vektoru  $\mathbf{v}'$  vzniklého rotací  $\mathbf{v}$  o úhel  $\varphi$ . Z obrázku snadno zjistíme, že vektor  $\mathbf{e}_1$  (o souřadnicích  $(1, 0)$ ) se při otočení o úhel  $\varphi$  proti směru hodinových ručiček změní na vektor o souřadnicích  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Vektor  $\mathbf{e}_2$  (jeho souřadnice jsou  $(0, 1)$ ) se při této rotaci změní na  $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ . Protože vektor  $\mathbf{v}$  o souřadnicích  $(x, y)$  můžeme napsat jako  $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ , budou složky otočeného vektoru  $\mathbf{v}'$  (díky linearitě rotace)  $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$ . Rotaci o úhel  $\varphi$  v rovině tedy odpovídá matice

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Jako cvičení vynásobte dvě matice odpovídající rotacím o úhly  $\alpha$  a  $\beta$ , interpretujte výsledek (viz motivace pro definici násobení matic) a na jeho základě odvoďte součtové vzorce pro  $\sin(\alpha + \beta)$  a  $\cos(\alpha + \beta)$  (obdržené výsledky porovnejte s tabulkami).

Při konstrukci matic popisujících rotace v prostoru můžeme postupovat analogicky. Například matice pro rotaci okolo osy  $z$  bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice popisující rotace okolo os  $x$  a  $y$  si spočítejte sami.

Jinou jednoduchou „fyzikální“ aplikaci nachází výše nastíněný matematický aparát v geometrické optice. V dalším se omezíme na takzvanou „paraxiální“ aproximaci, tedy budeme uvažovat jen paprsky v blízkosti optické osy, které s ní svírají malý úhel (pro malé úhly  $\varphi$  platí  $\varphi \sim \sin \varphi \sim \operatorname{tg} \varphi$ , o čemž se můžete snadno přesvědčit pomocí kalkulačky (úhly měříme v radiánech)). Vyušetřujeme chod paprsku soustavou centrovaných čoček. Paprsek popíšeme vektorem, jehož první složka bude odpovídat vzdálenosti paprsku od osy (v daném místě) a druhá složka bude odpovídat úhlu, který svírá s optickou osou (tento vektor není vektor směru šíření paprsku, ale jakýsi „stavový“ vektor, kterým popisujeme stav paprsku v daném bodě optické osy). Šíření paprsku prostředím pak můžeme popsat pomocí jeho násobení maticemi. Chod paprsku prostředím délky  $a$  bez lámavých ploch můžeme popsat násobením maticí (nezapomeňte, že používáme paraxiální aproximaci)

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tvar této matice vyplývá z toho, že úhel svíraný paprskem a osou se nezmění a vzdálenost paprsku od osy se změní o  $x' - x = a \operatorname{tg} \varphi \sim a\varphi$ . Při průchodu z prostředí o indexu lomu  $n_1$  do prostředí o indexu lomu  $n_2$  oddělených lámavou plochou o poloměru  $R$  (poloměr budeme považovat za kladný, pokud leží její střed vpravo od této plochy (paprsek se šíří zleva)) se pak „stavový“ vektor paprsku transformuje maticí (rozmyslete)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1}{n_2} & \frac{n_1 - n_2}{Rn_2} \end{pmatrix}.$$

Chod paprsku libovolnou soustavou čoček tedy můžeme popsat násobením stavového vektoru maticemi. Díky nekomutativitě maticového násobení je nutné matice násobit ve správném pořadí, odpovídajícímu pořadí průchodu paprsku jednotlivými částmi soustavy (například při změně pořadí násobení dvou matic odpovídajících průchodu plochami o poloměrech  $R$  a  $-R$  dostaneme matici odpovídající tenké rozptylce místo tenké spojky).

Na posledním místě stručně vysvětlíme využití matic při popisu setrvačných vlastností tělesa. Není pravdou (jak bývá často chybně uváděno), že moment hybnosti rotujícího tělesa  $\mathbf{L}$  má v obecném případě stejný směr jako vektor jeho úhlové rychlosti  $\mathbf{\Omega}$ . Dá se ukázat, že existuje lineární transformace, svazující vektor  $\mathbf{L}$  v bázi spojené s rotujícím tělesem, s vektorem  $\mathbf{\Omega}$  popsaná maticí  $I$  ( $\mathbf{L} = I\mathbf{\Omega}$ )-takzvaným *tenzorem setrvačnosti* která má pro hmotný bod tvar

$$I = \begin{pmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1r_2 & -r_1r_3 \\ -r_2r_1 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2r_3 \\ -r_3r_1 & -r_3r_2 & r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix},$$

kde  $r_i$  jsou složky polohového vektoru tohoto bodu. Pro obecné těleso bychom tenzor setrvačnosti spočítali pomocí objemového integrálu. Nerovnoběžnost vektorů  $\mathbf{L}$  s vektorem  $\mathbf{\Omega}$  způsobuje to, že pokud roztočíme obecně „šišaté“ těleso kolem osy procházející jejím těžištěm, bude to s osou „házet“ (v prostoru vektor  $\mathbf{L}$  obíhá po kuželi, takže pro udržení polohy osy na ni musíme působit podle druhé impulsové věty nenulovým a navíc nekonstantním momentem síly). Existují však význačné směry, takzvané *hlavní směry momentu setrvačnosti*. Jedná se o směry dané nám již známými vlastními vektory tenzoru setrvačnosti. Při rotaci okolo osy dané jedním z vlastních směrů platí, že  $\mathbf{L} = \lambda\mathbf{\Omega}$  (viz. definice vlastních vektorů). Vektor  $\mathbf{L}$  je v tomto případě konstantní, takže těleso rotuje bez „házení“. Symetrie tenzoru setrvačnosti,

nám pak zaručuje kolmost vlastních směrů. Díky tomu se dá každé těleso co do setrvačných vlastností nahradit homogenním elipsoidem. Symetrie tohoto elipsoidu pak vždy vystihuje symetrii původního tělesa. Zajímavým důsledkem tohoto faktu je to, že krychle a pravidelný čtyřstěn mají stejné setrvačné vlastnosti jako koule, tedy mají stejné momenty setrvačnosti vůči všem osám procházejícím těžištěm. A pokud vám až dosud připadala lineární algebra jako zbytečné hraní s tabulkami čísel, spočítejte si moment setrvačnosti krychle a čtyřstěnu vůči libovolné ose pomocí objemového integrálu).

### Úloha V. S ... algebra

- a) Dokažte, že vektory  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (-1, 0, 1)$ ,  $v_3 = (1, 1, 1)$  jsou lineárně závislé.  
 b) Vyřešte následující soustavu diferenciálních rovnic pomocí výpočtu exponenciály matice

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diskutujte tvar trajektorie řešení v rovině  $x, y$  v závislosti na znaménku parametrů  $a, b$ .

Nápověda: Zjistěte zda „náhodou“ neexistuje jistá podobnost mezi maticí této soustavy a komplexním číslem  $a + bi$  a vzpomeňte si na vzorec pro exponenciálu komplexního čísla z prvního dílu seriálu.

- c) Napište matice  $R_1, R_2, R_3$  popisující prostorové rotace o úhel  $\pi/2$  okolo os  $x, y$  a  $z$  a spočítejte komutátory  $[R_1, R_2]$ ,  $[R_1, R_3]$  a  $[R_2, R_3]$ .

Jako nepovinný bonus se můžete pokusit své výsledky zapsat v jednotném tvaru pomocí takzvaného *Levi-Civittova*  $\varepsilon$  [čti: levičivitova]. Levi-Civittovo  $\varepsilon$  je symbol se třemi indexy  $\varepsilon_{ijk}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , který nabývá následujících hodnot: Mají-li alespoň dva z jeho indexů stejnou hodnotu, je  $\varepsilon_{ijk} = 0$ . Dále  $\varepsilon_{123} = 1$  a pro všechny ostatní permutace indexů  $(1, 2, 3)$  získáme jeho hodnotu tak, že vyjdeme z posloupnosti  $1, 2, 3$ , kterou budeme postupně modifikovat přehazováním poloh dvou čísel (např.  $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3)$ ) a to tak dlouho, dokud nedospějeme k permutaci indexů která nás zajímá. Pokud byl počet kroků (přehození dvou čísel) sudý, bude  $\varepsilon_{ijk} = 1$  a v opačném případě je  $\varepsilon_{ijk} = -1$  (jedná se o totálně antisymetrický tenzor třetího řádu).



**FYKOS**

**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta**

**Ústav teoretické fyziky**

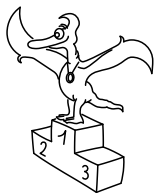
**V Holešovičkách 2**

**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)



## Pořadí řešitelů po III. sérii



### Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	4	<b>32</b>	<i>100</i>	<b>97</b>
<b>1.</b> Jaroslav Trnka	G Na Pražačce	5	1	0	1	4	8	3	<b>22</b>	<i>90</i>	<b>87</b>
<b>2.</b> Lukáš Chvátal		3	-	4	3	4	8	3	<b>25</b>	<i>84</i>	<b>67</b>
<b>3.</b> Miroslav Hejna	G F. M. Pelcla	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>97</i>	<b>63</b>
<b>4.</b> Tibor Vansa	G Matiční	1	4	3	4	3	8	4	<b>27</b>	<i>67</i>	<b>62</b>
<b>5.</b> Jan Prachař	G F. M. Pelcla	4	4	1	0	4	-	4	<b>17</b>	<i>80</i>	<b>61</b>
<b>6.</b> Karel Tůma	G Matiční	3	-	0	1	1	6	4	<b>15</b>	<i>61</i>	<b>54</b>
<b>7.</b> Jiří Lipovský	G Bystřice n. Pern.	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>86</i>	<b>32</b>
<b>8.</b> Lukáš Vozdecký	G Vejrostova, Brno	1	2	-	-	3	-	2	<b>8</b>	<i>52</i>	<b>29</b>
<b>9.</b> Václav Cviček	G Petra Bezruče	2	-	-	-	-	-	-	<b>2</b>	<i>90</i>	<b>26</b>
<b>10.-11.</b> Michal Bareš	G Mikulášské náměstí	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>80</i>	<b>20</b>
<i>Bryan Chen</i>		-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>61</i>	<b>20</b>
<b>12.</b> Jan Perný	G Nová Paka	2	-	-	-	0	-	-	<b>2</b>	<i>37</i>	<b>19</b>
<b>13.-14.</b> Matěj Týč	G Zastávka	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>63</i>	<b>15</b>
<i>Marek Vyšínka</i>	G Matyáše Lercha	-	-	-	-	3	-	4	<b>7</b>	<i>94</i>	<b>15</b>
<b>15.</b> Tomáš Kozelek	G Kadaň	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>62</i>	<b>13</b>
<b>16.</b> Miloslav Havelka	G Zastávka	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>73</i>	<b>11</b>
<b>17.-18.</b> Barbora Galaczková		-	-	-	-	-	-	3	<b>3</b>	<i>67</i>	<b>10</b>
<i>Lukáš Snášel</i>	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	2	<b>2</b>	<i>83</i>	<b>10</b>
<b>19.</b> Kateřina Jelénková	G Staré Město	-	-	-	-	-	-	4	<b>4</b>	<i>100</i>	<b>8</b>
<b>20.</b> Miroslav Zgažar	SPŠCh Ostrava	-	-	-	-	2	-	4	<b>6</b>	<i>75</i>	<b>6</b>
<b>21.-25.</b> Vendula Exnerová	G Nad Štolou, Praha	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>24</i>	<b>4</b>
<i>Josef Hanuš</i>	G Děčín	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>19</i>	<b>4</b>
<i>Radim Kusák</i>	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>100</i>	<b>4</b>
<i>Marek Pavlů</i>	SOU Litovel	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>100</i>	<b>4</b>
<i>Martin Szablatura</i>		-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>100</i>	<b>4</b>
<b>26.</b> Luboš Rabčan	G Trstená	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>15</i>	<b>2</b>
<b>27.-29.</b> Veronika Chromčíková	G Přerov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>25</i>	<b>1</b>
<i>Petr Navrátil</i>	G Přerov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>25</i>	<b>1</b>
<i>Zuzana Svobodová</i>	G Zlaté Moravce	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>25</i>	<b>1</b>

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	4	32	100	97
1. <i>Matouš Ringel</i>	G Broumov	4	4	0	5	4	7	4	28	88	85
2. <i>Jana Matějová</i>	SPŠ Chrudim	4	–	–	2	4	6	4	20	80	64
3. <i>Alexandr Kazda</i>	G Nad Alejí, Praha	4	4	3	1	5	3	2	22	70	62
4. <i>Jan Moláček</i>	G J. K. Tyla	4	4	3	–	3	–	3	17	88	57
5. <i>Petr Dostál</i>	G Žamberk	2	3	0	–	1	6	–	12	49	35
6. <i>Pavel Hála</i>	G Český Krumlov	1	–	0	–	2	6	4	13	49	32
7.–8. <i>Vojtěch Krejčířík</i>		–	–	–	–	–	6	–	6	65	31
<i>Martin Rybář</i>	GOA Blansko	4	–	–	1	1	6	–	12	55	31
9.–11. <i>Hynek Hanke</i>	G Budějovická, Praha	1	–	–	–	1	–	3	5	45	26
<i>Lucie Strmisková</i>	G Kyjov	–	–	–	–	–	7	4	11	74	26
<i>Jakub Závodný</i>	G Bratislava, Grösslingova	–	–	–	–	–	–	–	0	72	26
12. <i>Jan Ondruš</i>	G F. M. Pelcla	1	–	4	0	3	–	–	8	47	25
13. <i>Jana Hrudíková</i>	G Přerov	–	–	–	–	4	–	5	9	82	23
14. <i>Zuzana Rozlúvková</i>	G Boženy Němcové	–	–	1	–	3	4	1	9	56	22
15. <i>Jan Olšina</i>	G Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	0	72	21
16. <i>Michal Růžek</i>	G Arcibiskupské	4	–	–	–	–	–	–	4	71	15
17. <i>Mária Šedivá</i>	G Ludovita Štúra	0	–	–	–	–	6	–	6	44	14
18. <i>Petr Bílý</i>	G Slaný	–	–	–	–	–	–	–	0	76	13
19. <i>Radoslav Sopoliga</i>	G Svidník	–	–	–	0	–	–	–	0	31	11
20.–23. <i>Pavol Lakatoš</i>	G Velké Kapušany	–	–	–	–	–	–	–	0	25	9
<i>Jan Švarcbach</i>	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	22	9
<i>Zdeněk Váňa</i>	COP Hronov	–	–	0	–	1	–	–	1	45	9
<i>Michal Witiska</i>	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	31	9
24.–25. <i>Jan Křetínský</i>	G Matyáše Lercha	–	–	–	–	–	–	4	4	100	8
<i>Vladimír Sommer</i>	G Žďár nad Sázavou	–	–	–	–	–	–	4	4	100	8
26. <i>Jan Křivonožka</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	2	2	29	7
27. <i>Tomáš Gavenčíak</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	38	6
28.–29. <i>Libor Kukačka</i>	GOA Vrchlabí	2	0	–	–	–	–	–	2	42	5
<i>Jan Skalický</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	38	5
30.–32. <i>Markéta Novotná</i>	G Hranice	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
<i>Martina Smolová</i>	G Písek	0	–	0	–	–	–	–	0	24	4
<i>Petra Suková</i>	G Svitavy	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
33.–34. <i>Pavína Karníková</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
<i>Eva Lovišková</i>	G V. Makovského	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
35.–37. <i>Kateřina Balcarová</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	0	15	2
<i>Michal Havel</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	2
<i>Ivan Patáčík</i>	G Partizánské	1	1	–	0	–	–	–	2	17	2
38.–39. <i>Jana Pechková</i>	G Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	0	11	1
<i>Stanislav Plánička</i>	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	4	32	100	97
1. Anton Repko		–	4	0	4	3	7	4	22	85	61
2. Petr Houštěk	G Pelhřimov	–	–	–	1	1	–	3	5	70	39
3. Peter Greškovič	G Svidník	3	–	0	2	2	3	–	10	40	32
4. Martin Takáč	G Nové Zámky	–	–	–	–	4	3	5	12	51	25
5. Lenka Rychtrová	G Louny	0	1	–	1	–	5	–	7	27	21
6. Michal Humpula	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	4	4	65	20
7. Hana Suchemelová	G Ľudovíta Štúra	0	–	–	–	–	7	–	7	43	16
8. Pavel Kocourek		–	–	–	–	–	–	–	0	91	10
9.–10. Zdeněk Kučka	G Žďár nad Sázavou	0	–	0	–	1	–	1	2	12	8
<i>Rostislav Kváš</i>	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	100	8
11. Markéta Vilimovská	G Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	44	7
12. Markéta Kavalírová	G Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	38	6
13. Jiří Kubr	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	63	5
14.–15. Jiří Kulda	COP Hronov	–	–	0	–	0	–	–	0	27	4
<i>Aleš Razým</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	24	4
16. Karel Hofman	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
17.–18. Kateřina Divišová	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	8	2
<i>Monika Martinisková</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	15	2
19.–20. Štěpánka Mohylová	G Čs. exilu	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1
<i>Vladimíra Sečkárová</i>	G J. G. Tajovského	–	–	–	–	–	–	–	0	8	1

## Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	4	32	100	97
1. Tereza Klimošová	G Lanškroun	–	2	0	–	–	–	4	6	75	24
2. Jan Valášek	G Broumov	–	–	–	0	–	4	–	4	56	18
3. Jana Vrábellová	ZŠ Trenčín	–	–	–	–	–	6	–	6	39	17
4.–5. Michal Sívák	G Ľudovíta Štúra	0	–	–	–	–	6	–	6	44	14
<i>Vladimír Sívák</i>	G Ľudovíta Štúra	0	–	–	–	–	6	–	6	44	14
6. Ondrej Bogár	ZŠ Trenčín	–	–	–	–	–	5	–	5	44	11
7. Jan Bednář	COP Hronov	3	–	–	–	1	–	–	4	63	10
8. Petra Malá		–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
9. Tomáš Bednářík	G Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
10. Daniela Svobodová		–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
11. Marek Jansa	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	13	2
12.–13. Radek Škuta	G Čs. exilu	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1
<i>Zuzana Urbancová</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
14. David Chval	GOA Vimperk	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.