16. ročník, úloha I . 3 ... hračka *(4 body; průměr 2,24; řešilo 54 studentů)*

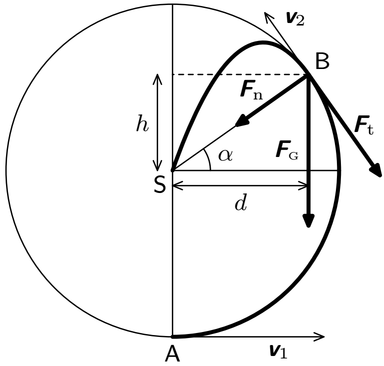
Organizátor FYKOSu dostal k narozeninám hračku, která je schématicky vyobrazena na obr. 1. Hračka, která slouží také jako záložka, se skládá z malého cínového kalíšku spojeného provázkem délky l s cínovou kuličkou.

Poraďte organizátorovi, jakou rychlost (ve vodorovném směru) má udělit kuličce, aby spadla do kalíšku. Uvažujte, že kalíšek je v klidu, je velmi malý při porovnání s délkou provázku a ztráty mechanické energie lze zanedbat.

Kulička se bude zpočátku pohybovat po kružnici s poloměrem l (délka provázku) a středem S (kalíšek). Dostředivá síla, kterou působí provázek na kuličku, má velikost

$$F_{\mathrm{do}} = m\frac{v^2}{l}$$

a působí ve směru provázku. Na kuličku dále působí síla tíhová, kterou můžeme rozložit na složku tečnou ($F_{\mathrm{t}} = mg\cos\alpha$) a normálovou ($F_{\mathrm{n}} = mg\sin\alpha$) k trajektorii. Provázek je napínán silou o velikosti $F = F_{\mathrm{do}} - F_{\mathrm{n}}$. Kulička se z kruhové trajektorie odchýlí v okamžiku, kdy provázek přestane být napínán, tedy $F = F_{\mathrm{do}} - F_{\mathrm{n}} = 0$, resp.



Obr. 1

$$mg\sin\alpha = m\frac{v_2^2}{l} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{v_2^2}{gl}. \tag{1}$$

V tomto okamžiku bude kulička výš než kalíšek. Z bodu B se kulička pohybuje po trajektorii šikmého vrhu. Ze zákona zachování energie dostaneme vztah

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_1^2 =& \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(h+l),\\ v_1^2 =& 2g(h+l) + v_2^2\end{aligned}$$

a ze vztahu (1) máme

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{v_2^2}{gl} \quad\Rightarrow\quad v_2^2 = gh.$$

Vztahy pro rychlost v_2 a úhel α tedy máme. Rychlost v_2 svírá se svislou osou úhel α. Pro souřadnice šikmého vrhu platí vztahy

$$\begin{aligned} x:&\quad d = v_2 t\sin\alpha,\\ y:&\quad 0 = h + v_2 t\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Z geometrie obrázku platí

$$l^2 = d^2 + h^2, \quad \cos\alpha = \frac{d}{l}, \quad \sin\alpha = \frac{h}{l}.$$

Z rovnice pro x vyjádříme čas

$$t = \frac{ld}{v_2 h}.$$

Vše dosadíme do vztahu pro y a dostaneme

$$0 = h + v_2 \frac{d}{l} \frac{ld}{v_2 h} - \frac{1}{2} g \frac{d^2 l^2}{g h^3}.$$

Dosazením za d z Pythagorovy věty a vyjádřením h dostaneme

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3} l.$$

Nyní dosazením do zákona zachování energie dostaneme

$$v_1 = \sqrt{3gh + 2gl} = \sqrt{gl(\sqrt{3} + 2)}.$$

Adéla Jelínková
`fykos@mff.cuni.cz`