16. ročník, úloha II . 3 . . . *zase jde vo prachy* *(4 body; průměr 1,94; řešilo 17 studentů)*

Mějme dvě prášková dielektrika o permitivitách ε_1 a ε_2. Smísíme je tak, že poměr jejich hmotností bude $m_1 : m_2$, poměr jejich objemů bude $V_1 : V_2$ a poměr jejich látkových množství bude $n_1 : n_2$. Jaká bude výsledná permitivita této směsi?

Nejdříve se zamyslíme nad tím, co vlastně chceme spočítat. Víme, že permitivita je úměrnost mezi *elektrickou indukcí* $\boldsymbol{D}$ a *intenzitou elektrického pole* $\boldsymbol{E}$. To v sobě vlastně skrývá to, že odezva látky na vnější pole (elektrická indukce) je úměrná intenzitě tohoto pole. Proto, když smícháme dvě látky, které mají lineární odezvy, čekáme, že jejich odezva ve směsi bude také lineární. A tento koeficient úměry určuje výslednou permitivitu.

Na to, abychom s permitivitou mohli pracovat, si představíme deskový kondenzátor. V něm platí

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Nyní bychom chtěli spočítat kapacitu kondenzátoru, ve kterém je směs dvou látek s různou permitivitou. Tato úloha se bohužel nedá řešit jednoznačně, pokud neznáme přesné prostorové rozložení jednotlivých složek. Kdybychom chtěli počítat přímo pro rovnoměrně rozloženou látku, museli bychom definovat, co přesně tím rovnoměrným rozložením myslíme. Podrobněji to rozebereme níže. Nyní se pokusíme odhadnout hodnoty alespoň pro krajní případy.

1) Pásy látek se střídají rovnoběžně z deskou kondenzátoru

V tomto případě si můžeme představit, že máme n za sebou sériově zapojených kondenzátorů

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{S\varepsilon_i},$$

kde d_i je šířka i-tého pásu a ε_i je buď ε_a, nebo ε_b, podle toho, z jaké látky je daný pruh. Při daných objemech jednotlivých složek víme, že součet délek pruhů ze stejných materiálů je $\sum_\mathrm{a} d_i = V_\mathrm{a}/S$, $\sum_\mathrm{b} d_i = V_\mathrm{b}/S$. Po dosazení dostáváme

$$C = \left(\frac{V_\mathrm{a}}{V\varepsilon_\mathrm{a}} + \frac{V_\mathrm{b}}{V\varepsilon_\mathrm{b}}\right)^{-1} \frac{S}{d},$$

kde V je celkový objem. Takže pro celkovou permitivitu dostáváme

$$\varepsilon_\parallel = \left(\frac{f_\mathrm{a}}{\varepsilon_\mathrm{a}} + \frac{f_\mathrm{b}}{\varepsilon_\mathrm{b}}\right)^{-1},$$

kde f_a, resp. f_b, jsme označili objemový podíl dané látky.

2) Pásy látky se střídají příčně na desku kondenzátoru

V tomto případě uvažujeme stejný postup jako předtím. S tím rozdílem, že teď se kondenzátory chovají jako paralelně zapojené. A také platí $\sum_\mathrm{a,b} S_i = V_\mathrm{a,b}/d$. Výsledek, který potom dostaneme, je

$$\varepsilon_\perp = f_\mathrm{a}\varepsilon_\mathrm{a} + f_\mathrm{b}\varepsilon_\mathrm{b}.$$

Vidíme, že výsledné permitivity nevyšly v obou případech stejně. Možná by se na první pohled zdálo, že problém je v rozložení látky, které jsme uvažovali. Skutečnost ukazuje, že řešení tohoto problému bohužel není zdaleka tak jednoduché, jak by se na první pohled zdálo.

Zde se vám pokusíme složitost tohoto problému nastínit. Například pro kuličky látky „b“ rovnoměrně rozložené v objemu látky „a“ se dá dostat výsledek

$$\frac{\varepsilon_{\mathrm{MGa}} - \varepsilon_{\mathrm{b}}}{\varepsilon_{\mathrm{MGa}} + 2\varepsilon_{\mathrm{b}}} = f_{\mathrm{a}} \frac{\varepsilon_{\mathrm{a}} - \varepsilon_{\mathrm{b}}}{\varepsilon_{\mathrm{a}} + 2\varepsilon_{\mathrm{b}}},$$

kde $\varepsilon_{\mathrm{MGa}}$ je výsledná permitivita pojmenovaná po objevitelích tohoto vztahu Maxwellovi a Garnettovi a „a“ značí, která látka je chápána jako dominantní. Jak vidíme, toto není obecné řešení, protože když vyměníme látky, výsledek se změní. Pokud bychom navíc neměli kuličky, ale nějakou úplně jinou směs, dostali bychom nějaký jiný výsledek.

Ale až tak beznadějné to není. Výsledek vlastně závisí na tom, jak moc se změní elektrická intenzita. Pro intenzitu všude stejnou (což je 2. případ, protože permitivita ve směru pole je pořád stejná a nevznikají rozhraní, na kterých by se hromadil náboj) máme výsledek $\varepsilon_{\perp}$. A pro často se měnící intenzitu (to je 1. případ, protože vznikají rozhraní s různou permitivitou a tím i polarizací a na rozhraních se hromadí náboj) je výsledek $\varepsilon_{\parallel}$. V každém jiném případě se čáry intenzity ohýbají a část se jich rozhraním vyhne. Takže skutečná výsledná permitivita je mezi $\varepsilon_{\perp}$ a $\varepsilon_{\parallel}$, což je pro blízké permitivity přibližně stejné. Chytré knížky říkají, že v izotropním případě bude výsledek mezi $\varepsilon_{\mathrm{MGa}}$ a $\varepsilon_{\mathrm{MGb}}$.

Na závěr bychom ještě zdůraznili fakt, že výsledná permitivita bude záviset na objemových podílech (jak nám vyšlo) a ne na podílu látkových množství, či hmotností daných složek. Plyne to mimo jiné i z toho, že pro energii elektrického pole platí $W = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} V$.

Jak vidno, ne všechny úlohy mají ve fyzice jednoduchá a přímočará řešení. Snad vás tento fakt příliš nerozladil a těší vás, že jste přičichli k ještě živému problému fyziky.

Miro Kladiva
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.