16. ročník, úloha IV . E . . . *od medvídka Pú* *(8 bodů; průměr 4,32; řešilo 19 studentů)*

Výzkumný ústav medvídka Pú při AV ČR vypsal grant ve výši osmi (výjimečně více) bodů na změření závislosti viskozity medu na teplotě. Nezapomeňte uvést druh medu, který používáte.

Metody měření

Nejčastějšími postupy bylo měření doby pádu tělíska v medu a průtoku medu kapilárou, ale objevily se i originálnější nápady, jako například měření doby za jakou skápne med ze lžičky nebo za jak dlouho steče po nakloněné rovině. Bohužel v těchto případech se chování medu nedá popsat jednoduchým modelem a získané výsledky se dají použít jen kvalitativně. Vzhledem k velmi rozdílným naměřeným hodnotám jsme se rozhodli použít úplně jinou metodu měření než všichni řešitelé. Jádrem našeho experimentu byl model rotačního viskozimetru, tj. dva souosé rotační válce, mezi kterými je nalitý med. Vnější válec o poloměru r_1 (v našem případě obyčejná kádinka) je pevně uchycen a ponořen ve vodní lázni. Na vnitřním válci o poloměru r_2 je v horní části natočená nit, která vede na kladku, a na jejím konci visí závažíčko o hmotnosti m. Tuto část aparatury nebyl problém sestavit ze stavebnice LEGO. Pokus potom vypadal následovně: pustili jsme závažíčko a to roztočilo vnitřní válec. Díky viskozitě medu tak vznikla odporová síla F_m, která pohyb závažíčka brzdila. Zároveň samozřejmě působila i odporová síla F_o aparatury vzniklá třením v ložiscích. Tu jsme odhadli jako úměrnou rychlosti pohybu závažíčka a koeficient úměrnosti k získali tak, že jsme nechali závažíčko padat, když ještě mezi válci nebyl med. Vzhledem k tomu, že F_m s rychlostí roste, dospěje systém po chvíli do rovnovážného stavu $mg = F_\mathrm{o} + F_\mathrm{m}$ a závaží se bude pohybovat rovnoměrným pohybem.

Teorie

Pro smykové napětí τ v kapalině o viskozitě η mezi válci bude platit ve vzdálenosti r od středu vztah

$$\tau = \frac{\eta r \Delta\omega}{\Delta r}.$$

Moment síly M, který působí na válcové ploše o poloměru r a výškou h lze získat tak, že vynásobíme smykové napětí ramenem síly r a plochou $2\pi r h$

$$M = 2\pi r^2 h\tau = \frac{2\pi\eta r^3 h\Delta\omega}{\Delta r}.$$

Vzhledem k tomu, že je proudění medu ustálené, musí být výsledný moment síly, který působí na vrstvu medu o poloměru r nulový (je v rovnováze se stejně velkým momentem působícím na vrstvu v opačném směru ve vzdálenosti $r + \Delta r$). Uvažovaný moment tedy musí být nezávislý na r a proto

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta r} = \frac{A'}{r^3}.$$

Po zintegrování bude úhlová rychlost

$$\omega = -\frac{A}{r^2} + B.$$

Konstanty A a B získáme z počátečních podmínek

$$\omega = \omega_1 \quad \text{při} \quad r = r_2,$$

$$\omega = 0 \quad \text{při} \quad r = r_1.$$

Výsledný vztah pro moment síly potom bude

$$M = \frac{4\pi r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \eta h \omega_1 ,$$

Dosadíme-li za $\omega_1 = L/tr_2$, kde L je délka dráhy, po které se závažíčko pohybovalo, a t čas, za který tuto dráhu urazilo (pohyb se dá považovat za rovnoměrný), a za moment síly $M = r_2\,(mg - kL/t)$ vyjde η

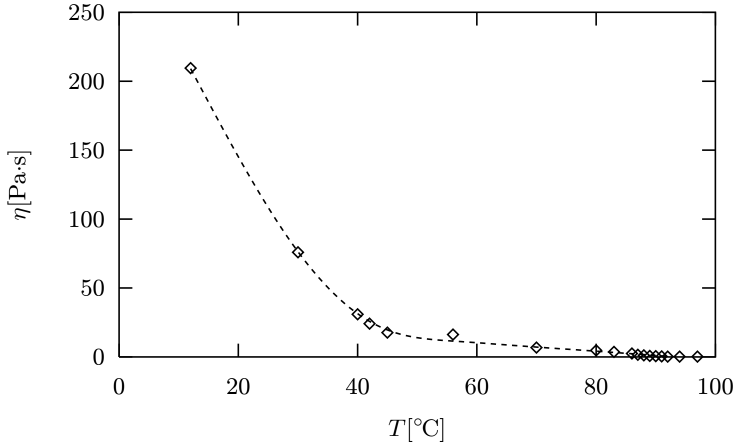
$$\eta = \frac{(mgt - kL)(r_1^2 - r_2^2)}{4\pi h r_1^2 L t} .$$

Je třeba dbát na to, aby ω nepřekročila mez laminárního proudění medu. Tato hranice je obvykle charakterizovaná tzv. Reynoldsovým číslem. Pro naše uspořádání bude

$$R = (r_1 - r_2)\, r_2 \omega \frac{\varrho}{\eta} < 1900 .$$

T[°C]	12	30	40	42	45	56	70	80	83
η[Pa·s]	209,5	75,9	30,94	24,13	17,62	16,27	6,80	4,78	3,63
σ_η[Pa·s]	2,9	2,0	0,81	0,63	0,46	0,42	0,43	0,18	0,13

T[°C]	86	87	88	89	90	91	92	94	97
η[Pa·s]	2,49	1,557	1,181	0,773	0,575	0,382	0,252	0,237	0,233
σ_η[Pa·s]	0,10	0,071	0,048	0,040	0,032	0,029	0,018	0,015	0,015



Obr. 1. Naměřená závislost viskozity medu na teplotě

Výsledky měření

Snadným výpočtem se přesvědčíme, že jsme opravdu mez laminárnosti nepřekročili a náš fyzikální model je tedy platný. Jak je patrné z grafu, tvar závislost je klesající, největší pokles pozorujeme při teplotách do 40 °C. Teoretické vysvětlení pozorované závislosti se nám nepodařilo nalézt, domníváme se ale, že pokud nějaké existuje, bude značně složité.

Pár poznámek k řešením

Každé správné vyhodnocení experimentu by nemělo postrádat výpočet odchylky měření, v opačném případě nevíme, jak přesné výsledky jsou, a tím v podstatě ztrácejí význam. Dále je vhodné vypracovat graf toho, co bylo v zadání experimentu (hodně řešitelů kreslilo graf závislosti průtoku kapilárou na teplotě). Na závěr bychom chtěli poděkovat nejmenované řešitelce za ochutnávku a několika dalším za tipy na kvalitní med.

Michael Komm
michael@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.