16. ročník, úloha V . 1 ... *prší, prší* *(4 body; průměr 1,85; řešilo 13 studentů)*

V dešťovém mraku je množství malých kapiček vody, jejichž hustotu (tj. celkovou hmotnost kapiček v nějakém objemu lomeno tímto objemem) označme ϱ_1, hustotu vody ϱ_0. Spojením několika kapiček vznikne větší kapka, která začne padat a postupně na sebe nabaluje další a další kapičky. Spočítejte, jak se bude měnit poloměr padající kapky a s jakým zrychlením se bude pohybovat.

Pro jednoduchost neuvažujte odpor vzduchu působící na kapku a malé kapičky považujte za nehybné.

Spočítejme nejdříve, jak vypadá nabalování kapičky. Pohybuje-li se kapička o poloměru r rychlostí v, tak za interval[1] času $\mathrm{d}t$ projde objemem $\mathrm{d}V = \pi r^2 v\,\mathrm{d}t$ a zvýší tedy svou hmotnost o $\mathrm{d}m = \pi r^2 v \varrho_1\,\mathrm{d}t$.

Tento přírůstek hmotnosti má za následek zvětšení poloměru kapky o $\mathrm{d}r$, pro které platí $\mathrm{d}m = 4\pi r^2 \varrho_0\,\mathrm{d}r$, tedy po dosazení za $\mathrm{d}m$

$$\mathrm{d}r = \frac{\varrho_1}{4\varrho_0} \cdot v\,\mathrm{d}t = \frac{\varrho_1}{4\varrho_0} \cdot \mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\varrho_1}{4\varrho_0} \cdot s.$$

Implikace platí proto, že na počátku, kdy je uražená dráha s nulová, je podle zadání i poloměr kapky nulový (kapka vznikne spojením několika mikroskopických kapiček).

Velikost kapky je tedy přímo úměrná dráze, kterou ve vzduchu urazila. Přistupme k odvození jejího pohybu. Předpokládejme, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb[2] se zrychlením a a vyjádřeme časovou závislost rychlosti, dráhy a poloměru:

$$\begin{aligned} v &= at, \\ s &= \frac{1}{2}at^2, \\ r &= \frac{\varrho_1 s}{4\varrho_0} = \frac{\varrho_1 a t^2}{8\varrho_0}. \end{aligned}$$

Napišme nyní II. Newtonův zákon ve tvaru se změnou hybnosti (tvar $F = ma$ nelze použít kvůli proměnlivé hmotnosti)

$$mg = F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}mv}{\mathrm{d}t} = ma + v \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{m} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = g - a.$$

Dosaďme za m a $\mathrm{d}m$

$$g - a = \frac{v}{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_0} \cdot \pi r^2 v \varrho_1 = \frac{3\varrho_1 v^2}{4\varrho_0 r}$$

a nyní ještě za v a r

$$g - a = \frac{3\varrho_1 a^2 t^2}{4\varrho_0} \cdot \frac{8\varrho_0}{\varrho_1 a t^2} = 6a \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{7}g.$$

---

1) velmi krátký, viz 2. díl letošního seriálu

2) Pro rejpaly znalé diferenciálního počtu – toto je zcela legitimní způsob řešení diferenciální pohybové rovnice, říká se tomu *ansatz*.

Vidíme, že předpoklad o rovnoměrně zrychleném pohybu byl správný. Na první pohled zarážející fakt, že zrychlení nezávisí na ϱ_1, je kupodivu v pořádku, rozmyslete si proč!

Honza Houštěk
honza@fykos.mff.cuni.cz