16. ročník, úloha VI . 4 ... pevnost nosníku *(4 body; průměr 3,71; řešilo 7 studentů)*

Uvažujte pružný nosník délky l. Energie potřebná k prohnutí jednotky délky tohoto nosníku na poloměr křivosti R je $E = \alpha/R^2$, kde α je známá konstanta. Jakou maximální silou můžeme tlačit na tento nosník, aby se neprohnul do strany?

Nejprve spočítejme do jakého tvaru se nosník prohne, budeme-li na jeho konce tlačit dostatečnou silou. Zaveďme si souřadný systém tak, že nosník splývá s osou x a jeho střed leží v počátku. Uvažujme element délky nosníku vychýlený o y od osy x. Síla, kterou na nosník tlačíme, ohýbá uvažovaný element momentem síly úměrným jeho výchylce y (nakreslete si obrázek). Tomuto momentu bude úměrná křivost nosníku v daném bodě, kterou můžeme v případě, že vychýlení je malé aproximovat výrazem

$$1/R = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \simeq y''$$

Tvar nosníku tedy bude řešením diferenciální rovnice

$$y'' = -cy,$$

kde c je nějaká kladná konstanta. V této rovnici poznáváme diferenciální rovnici harmonických kmitů, jejím obecným řešením je funkce $A \sin \sqrt{c}x + B \cos \sqrt{c}x$. Vychýlení nosníku v bodech $x = -l/2, x = l/2$ musí být nulové, takže nosník zaujme tvar

$$y = p \cos \frac{\pi x}{l}, \tag{1}$$

kde p je parametr udávající vychýlení středu nosníku. (Požadované okrajové podmínce odpovídají i siny a kosiny s menší periodou, ale jim odpovídající tvar není stabilní rovnovážnou polohou)

Dále uvažujme takto: Přímá poloha nosníku je vždy rovnovážná, její stabilita však závisí na působící síle. Stabilitu nosníku vyšetříme tak, že budeme předpokládat, že v důsledku nějakého náhodného vlivu (například otřesu a podobně) bude nosník nepatrně vychýlen z přímé polohy. Při tomto vychýlení se přiblíží konce nosníku o Δl, takže působící síla vykoná práci $F\Delta l$. Dále se nosník nějakým způsobem zakřiví, takže podle vzorce ze zadání vzroste jeho potenciální energie. Pokud bude vykonaná práce větší než přírůstek potenciální energie, bude vychylování „energeticky výhodné“, a proto bude pokračovat až do ustálení nové stabilní rovnovážné polohy.

Tvar nosníku může být při náhodném malém vychýlení libovolný. Uvažujme všechna možná vychýlení, při kterých se nosník zkrátí o nějaké Δl. Ze všech těchto vychýlení bude nárůst potenciální energie nosníku nejmenší pro vychýlení, při kterém nosník zaujme tvar stejný, jako by byl v rovnovážné poloze při dané vzdálenosti jeho konců $l - \Delta l$. Takový tvar nosník zaujme, pokud ho upneme do „dokonalého svěráku“ a přiblížíme čelisti o δl. Čelisti svěráku však budou v tomto případě na nosník působit jinou silou než F, takže nosník v této poloze rozhodně stabilní nebude.

Podle předcházejících výpočtů je tedy ze všech možných náhodných prohnutí energeticky nejméně náročné prohnutí do tvaru oblouku kosinu a právě při něm proto nejsnáze dojde k vychýlení do strany. Stačí tedy spočítat energetickou bilanci právě v tomto případě.

Zkrácení nosníku δl spočítáme pomocí vzorce pro výpočet délky křivky. Velikost výchylky popíšeme parametrem p (viz. (1)) a můžeme psát

$$\int_{-l/2+\Delta l/2}^{l/2-\Delta l/2} \sqrt{1 + (y')^2} = l,$$

$$\int_{-l/2+\Delta l/2}^{l/2-\Delta l/2} 1 + \frac{p^2\pi^2}{2l^2}\cos^2\frac{\pi x}{l} \simeq l,$$

$$\Delta l \simeq \frac{p^2\pi^2}{4l},$$

kde jsme využili přibližného vztahu $\sqrt{1+a} \simeq 1+a/2$, který platí pro malá a. Změnu potenciální energie pak spočítáme jako

$$\Delta E_p = \int_{-l/2}^{l/2} \alpha(y'')^2\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha p^2\pi^4}{2l^3}$$

Porovnáním těchto výsledků dostáváme pro kritickou sílu, při které se stane nosník nestabilním

$$F = \frac{4\pi^2\alpha}{l^2}.$$

Pavel Augustinský
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.