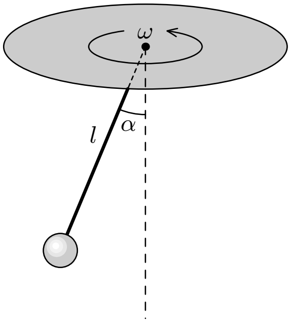
17. ročník, úloha IV . P ... *kolotoč* *(3 body; průměr 2,00; řešilo 38 studentů)*

Představme si rotující vodorovný disk. V jeho středu je připevněné kyvadélko, jak je znázorněno na obr. 1. Protože na něj působí odstředivá síla, odchýlí se o úhel α od svislého směru. Určete tento úhel, pokud je délka kyvadélka 1 m a frekvence jeho otáčení 1 Hz.

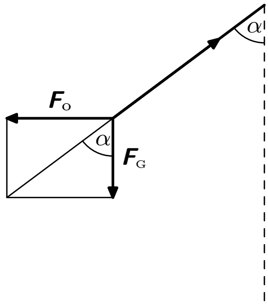
Navrhl Honza Houštěk inspirován starou úlohou z FO.



Obr. 1. Kolotoč

V této úloze záleží na tom, jak je kulička spojena se středem otáčejícího se disku. Pokud je spojena vazbou, která není schopna přenášet rotační pohyb, pak se kulička ani nehne. Předpokládejme, že je kulička spojena s diskem například nehmotnou tyčí připevněnou k disku tak, aby se točila a zároveň se mohla vychylovat.

Nyní se podívejme na to, o jaký úhel se vlastně kyvadélko vychýlí. Z neinerciální soustavy spojené s kuličkou působí na kuličku síla tíhová, setrvačná odstředivá a reakce lanka. Všechny tyto síly se navzájem vyruší (kulička je totiž sama vůči sobě v klidu). Z geometrie sil dle obrázku 2 plyne



Obr. 2

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg},$$

kde m je hmotnost kuličky, ω úhlová frekvence, α úhel odklonění, g hodnota gravitačního zrychlení na povrchu Země a r vzdálenost kuličky od osy otáčení a platí $r = l \sin\alpha$, kde l je délka závěsu. Dosazením do rovnice získáváme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m\omega^2 l \sin\alpha}{mg},$$

$$\sin\alpha \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\omega^2 l}{g} \right) = 0.$$

Tato rovnice má 2 řešení

$$\sin\alpha = 0,$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}. \tag{1}$$

Výsledek z první rovnice $\alpha = 0$ znamená, že se kulička bude otáčet, ale zůstane na ose disku; toto řešení je labilní poloha kuličky. Druhé řešení po dosazení $\omega = 2\pi f$ vyjde číselně $\alpha \doteq 76^\circ$, což je stabilní poloha kuličky. Mnoho z vás spočítalo stabilní řešení správně, ale dělilo sinem a tím ztratilo druhé – labilní řešení.

Zamysleme se na závěr nad tím, kdy bude svislá poloha kuličky labilní. Kyvadélko vychýlíme od svislice o malý úhel α, kulička bude potom vracena zpět silou

$$F \approx mg\alpha - m\omega^2 l\alpha,$$

kde jsme využili $\sin\alpha \approx \alpha$ pro malé α. Aby byla svislá poloha kuličky labilní, musí být $F < 0$, tedy

$$g < \omega^2 l.$$

Pokud je tato podmínka splněna, má výraz (1) smysl, tudíž máme dvě rovnovážné polohy – stabilní (s výchylkou $\arccos g/\omega^2 l$) a svislá labilní. Tento případ nastal v našem případě, neboť

$$\frac{g}{\omega^2 l} \doteq 0{,}25 < 1.$$

Původně jsme chtěli příklad zadat tak, aby

$$\frac{g}{\omega^2 l} > 1.$$

Pak totiž existuje jediná rovnovážná poloha – svislá a je stabilní. Výraz (1) pro druhou rovnovážnou polohu nemá smysl.

Karel Tůma
`kajinek@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.