17. ročník, úloha V . 4 ... *levitace na světle* *(4 body; průměr 2,29; řešilo 14 studentů)*

Skleněná polokoule o poloměru $R = 10\,\mathrm{cm}$ a indexu lomu n je umístěna v gravitačním poli Země rovnou plochu dolů. Úzkým laserovým paprskem svítíme ze spodu ve směru osy polokoule. Jaký musí být výkon laseru, aby polokoule levitovala. Šířka laserového paprsku je $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ a jeho vlnová délka je $\lambda = 660\,\mathrm{nm}$. *Úloha ze 34. MFO na Taiwanu.*

Nejdříve je nutné si uvědomit, co všechno se s laserovým paprskem bude dít. Na obou rozhraních dojde k částečnému odrazu a na kulovém rozhraní se bude paprsek lámat. Podle Snellova zákona platí (viz obr. 1)

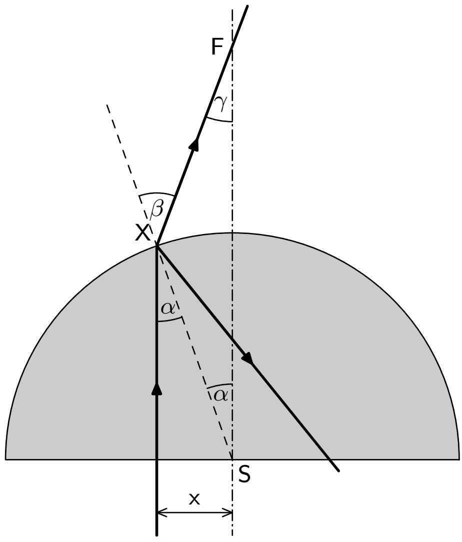
$$n \sin\alpha = \sin\beta .$$

Dle zadaných hodnot je $d/2R \ll 1$, s dostatečnou přesností tedy platí (zkuste ověřit, v Taylorově rozvoji zanedbáme členy řádu tři a výše) $\sin\alpha \approx \alpha$. Můžeme proto napsat

$$n\alpha = \beta .$$

Z trojúhelníku $\triangle$FXS máme

$$\gamma = \beta - \alpha = (n-1)\alpha . \tag{1}$$



Obr. 1

Frekvenci laserového světla označme $f = c/\lambda$ a N_0 bude počet fotonů laserového svazku, které dopadnou na jednotkovou plochu za jednotku času. Celkový počet fotonů, které dopadnou na spodní rovnou plochu skleněné polokoule za jednotku času, tedy je $N_0 \pi d^2/4$. Celkový výkon těchto fotonů proto je

$$P = \frac{1}{4} N_0 \pi d^2 h f ,$$

kde h je Planckova konstanta, odtud

$$N_0 = \frac{4P}{\pi d^2 h f} .$$

Počet fotonů na jednotku plochy za jednotku času, které se odrazí od rovné plochy označme N_0', které projdou rovnou plochou a dopadnou na kulovou plochu N_1, od ní se odrazí N_1' a projde N_2. Označíme-li propustnost skla τ a zanedbáme-li absorbci, která je u skla malá, potom platí

$$N_0' = (1-\tau)N_0, \quad N_1 = \tau N_0, \quad N_1' = \tau(1-\tau)N_0, \quad N_2 = \tau^2 N_0.$$

Další odrazy paprsku od kulové plochy zanedbáme.

Vyřešme nejprve odraz od rovné plochy. Hybnost jednoho fotonu je $p = hf/c$. Změna hybnosti všech odražených fotonů tedy bude

$$\Delta p = \frac{2hfN_0'}{c}\frac{\pi d^2}{4}\Delta t,$$

odkud pro sílu, kterou fotony na skleněnou polokouli působí, dostaneme

$$F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\pi h f d^2 N_0'}{2c} = \frac{2P(1-\tau)}{c}.$$

Dále se zamysleme nad paprsky, které se lámou na kulové ploše. Velikost hybnosti fotonu je před vstupem do polokoule a po výstupu z ní stejná, protože je stejná vlnová délka. Hybnost ale v důsledku lomu změní směr, proto se změní její průmět do osy symetrie (označme ho p_z). Ze zákona zachování hybnosti tudíž plyne, že rozdíl hybností byl předán skleněné polokouli.

Protože úhel odklonu paprsku závisí na vzálenosti od osy, budeme muset uvažovat infinitezimálně, paprsky si rozdělíme na tenká mezikruží. Počet fotonů, které projdou kruhovým mezikružím s vnitřím poloměrem r a vnějším poloměrem $r+\mathrm{d}r$ za jednotku času, je $N_2 \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r$. Změna z-ové složky hybnosti všech těchto fotonů tedy bude

$$\Delta(\mathrm{d}p_z) = \frac{hfN_2}{c}\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r(1-\cos\gamma)\Delta t,$$

tomu odpovídající síla je

$$\mathrm{d}F_2 = \frac{\Delta(\mathrm{d}p_z)}{\Delta t} = \frac{2\pi hfN_2}{c}\cdot(1-\cos\gamma)r\,\mathrm{d}r. \tag{2}$$

Znovu využijeme toho, že úhel α je malý (v Taylorově rozvoji zanedbáme členy řádu tři a výše), a vztahu (1) dostaneme

$$\cos\gamma \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2} = 1 - \frac{(n-1)^2\alpha^2}{2}.$$

Dále platí

$$r = R\sin\alpha \approx R\alpha.$$

Dosazením do (2) obdržíme

$$\mathrm{d}F_2 = \frac{\pi hfN_2}{c}\cdot\frac{(n-1)^2r^3}{R^2}\,\mathrm{d}r,$$

celková síla je

$$F_2 = \frac{\pi hfN_2}{c}\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{(n-1)^2r^3}{R^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi hf(n-1)^2d^4N_2}{64cR^2} = \frac{P(n-1)^2d^2\tau^2}{16cR^2}.$$

Analogicky budeme postupovat pro paprsek odražený od kulové sféry. Změna z-ové složky hybnosti všech odražených fotonů bude

$$\Delta(\mathrm{d}p_z) = \frac{hfN_1'}{c} \cdot 2\pi r \,\mathrm{d}r(1+\cos 2\alpha)\Delta t,$$

tomu odpovídající síla je

$$\mathrm{d}F_1 = \frac{\Delta(\mathrm{d}p_z)}{\Delta t} = \frac{2\pi hfN_1'}{c} \cdot (1+\cos 2\alpha) r\,\mathrm{d}r. \tag{3}$$

Opět využijeme toho, že úhel α je malý, a dostaneme

$$\cos 2\alpha \approx 1 - \frac{(2\alpha)^2}{2} = 1 - 2\frac{r^2}{R^2}.$$

Vztah (2) má potom tvar

$$\mathrm{d}F_1 = \frac{4\pi hfN_1'}{c} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r,$$

celková síla je

$$F_1 = \frac{4\pi hfN_1'}{c} \int_0^{\frac{d}{2}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi hfd^2N_1'}{2c}\left(1 - \frac{d^2}{8R^2}\right) = \frac{2P\tau(1-\tau)}{c}\left(1 - \frac{d^2}{8R^2}\right). \tag{4}$$

Nyní už jsme schopni určit výslednou sílu, která „nadnáší“ skleněnou polokouli

$$F = F_0 + F_1 + F_2 = \frac{P}{c}\left(2(1-\tau^2) + \frac{d^2\tau}{4R^2}\left(\frac{(n-1)^2\tau}{4} - (1-\tau)\right)\right).$$

Z Fresnelových rovnic můžeme pro propustnost dostat

$$\tau = nn'\left(\frac{2}{n+n'}\right)^2,$$

kde n je index lomu prostředí, ze kterého poaprsek vystupuje, a n' je index lomu prostředí, do kterého paprsek vstupuje. V našem případě tedy platí

$$\tau = n\left(\frac{2}{1+n}\right)^2,$$

dosazením do (4) po úpravě obdržíme

$$F = \frac{P}{c(n+1)^4}\left(2(n+1)^4 - 32n^2 + \frac{d^2}{R^2}n(n-1)^3\right).$$

Tuto sílu porovnáme s tíhovou a pro hledaný výkon laseru dostaneme

$$P = \frac{mgc(n+1)^4}{2(n+1)^4 - 32n^2 + \frac{d^2}{R^2}n(n-1)^3} \doteq 1{,}8 \cdot 10^{11}\,\mathrm{W} = 180\,\mathrm{GW},$$

kde $m = 2\pi\varrho R^3/3$ je hmotnost skleněné polokoule. Vidíme, že potřebujeme obrovský výkon. I malá absorbce skla způsobí, že se polokoule v mžiku vypaří. Hodnoty d a R byly zadané tak, že jsme mohli zanedbávat i člen d^2/R^2.

Poznámky k došlým řešením. Jedna skupina řešitelů diskutovala pouze lom světla na kulové ploše, druhá skupina zase naopak předpokládala, že bude všechno světlo pohlceno nebo odraženo. Protože se jiná řešení prakticky nevyskytla, nevyřešil úlohu nikdo zcela správně.

Honza Prachař
`honzik@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.