20. ročník, úloha III . S ... *impulsmoment* *(6 bodů; průměr 4,00; řešilo 12 studentů)*

a) *Dokažte, že z komutační relace* $[\widehat{J}_i, \widehat{J}_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\widehat{J}_k$ *plyne kompatibilnost operátoru* $\widehat{J}_3$ *s operátorem* $\widehat{J}^2$.

b) *Definujme posunovací operátory*

$$\widehat{J}_\pm = \widehat{J}_1 \pm \mathrm{i}\widehat{J}_2 \,.$$

Vypočítejte komutační relace $[\widehat{J}_+, \widehat{J}_-]$, $[\widehat{J}_3, \widehat{J}_\pm]$, $[\widehat{J}_\pm, \widehat{J}^2]$.

c) *Na základě těchto vztahů dokažte, že vektory* $\widehat{J}_\pm|j,m\rangle$ *jsou vlastními stavy operátorů* $\widehat{J}^2$ *a* $\widehat{J}_3$ *a platí pro ně*

$$\widehat{J}^2(\widehat{J}_\pm|j,m\rangle) = j(j+1)(\widehat{J}_\pm|j,m\rangle)\,, \qquad \widehat{J}_3(\widehat{J}_\pm|j,m\rangle) = (m\pm 1)(\widehat{J}_\pm|j,m\rangle)\,.$$

d) *(Bonus) Z předchozího vyplývá, že*

$$\widehat{J}_+|j,m\rangle = \alpha^{(+)}(j,m)|j,m+1\rangle\,, \qquad \widehat{J}_-|j,m\rangle = \alpha^{(-)}(j,m)|j,m-1\rangle\,,$$

kde $\alpha^{(\pm)}(j,m)$ *jsou koeficienty závislé na* j *a* m. *Určete je.*
Rada: Užijte relace $(\widehat{J}_\pm)^\dagger = \widehat{J}_\mp$ *a toho, že pokud operátor působí napravo jako* $\widehat{A}$, *tak nalevo působí jako hermitovsky sdružený* $\widehat{A}^\dagger$, *tj.*

$$\langle a|\,(\widehat{A}|b\rangle) = (\langle a|\widehat{A}^\dagger)\,|b\rangle\,.$$

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

Na začátku si jako pomocný vztah odvodíme důležitou vlastnost komutátoru

$$[\widehat{J}_i^2, \widehat{J}_j] = \widehat{J}_i^2\widehat{J}_j - \widehat{J}_j\widehat{J}_i^2 = (\widehat{J}_i^2\widehat{J}_j - \widehat{J}_i\widehat{J}_j\widehat{J}_i) + (\widehat{J}_i\widehat{J}_j\widehat{J}_i - \widehat{J}_j\widehat{J}_i^2) = \widehat{J}_i[\widehat{J}_i, \widehat{J}_j] + [\widehat{J}_i, \widehat{J}_j]\widehat{J}_i\,.$$

Tato vlastnost se nazývá *linearita*.

a) Kompatibilita operátoru $\widehat{J}_3$ s kvadrátem impulsmomentu $\widehat{J}^2 = \sum_i \widehat{J}_i^2$ znamená $[\widehat{J}_3, \widehat{J}^2] = 0$. Z linearity komutátoru plyne

$$[\widehat{J}_3, J^2] = [\widehat{J}_3, \widehat{J}_1^2] + [\widehat{J}_3, \widehat{J}_2^2] + [\widehat{J}_3, \widehat{J}_3^2] = \widehat{J}_1[\widehat{J}_3, \widehat{J}_1] + [\widehat{J}_3, \widehat{J}_1]J_1 + \widehat{J}_2[\widehat{J}_3, \widehat{J}_2] + [\widehat{J}_3, \widehat{J}_2]\widehat{J}_2\,,$$

kde jsme využili toho, že operátor $\widehat{J}_3$ komutuje s libovolnou funkcí sebe sama. Komutační relace nám dávají

$$[\widehat{J}_3, \widehat{J}_1] = \mathrm{i}\widehat{J}_2\,, \qquad [\widehat{J}_3, \widehat{J}_2] = -\mathrm{i}\widehat{J}_1\,.$$

Po dosazení pak dostaneme

$$[\widehat{J}_3, \widehat{J}^2] = \mathrm{i}\widehat{J}_1\widehat{J}_2 + \mathrm{i}\widehat{J}_2\widehat{J}_1 - \mathrm{i}\widehat{J}_2\widehat{J}_1 - \mathrm{i}\widehat{J}_1\widehat{J}_2 = 0\,.$$

Naprosto stejným postupem bychom dostali, že stejně tak komutují s $\widehat{J}^2$ i operátory $\widehat{J}_1$ a $\widehat{J}_2$.

b) Užití komutačních relací

$$[\widehat{J}_1, \widehat{J}_2] = \mathrm{i}\widehat{J}_3\,, \qquad [\widehat{J}_2, \widehat{J}_3] = \mathrm{i}\widehat{J}_1\,, \qquad [\widehat{J}_1, \widehat{J}_3] = -\mathrm{i}\widehat{J}_2$$

a linearity vede po jednoduchých výpočtech na

$$[\widehat{J}_+, \widehat{J}_-] = [\widehat{J}_1 + \mathrm{i}\widehat{J}_2, \widehat{J}_1 - \mathrm{i}\widehat{J}_2] = [\widehat{J}_1, \widehat{J}_1] + \mathrm{i}[\widehat{J}_2, \widehat{J}_1] - \mathrm{i}[J_1, \widehat{J}_2] + [\widehat{J}_2, \widehat{J}_2] = 2\widehat{J}_3\,.$$

Obdobně dostaneme pro další dva komutátory

$$[\widehat{J}_3, \widehat{J}_\pm] = \pm\widehat{J}_\pm\,, \qquad [\widehat{J}_\pm, \widehat{J}^2] = 0\,.$$

c) O vektoru $|j,m\rangle$ víme, že je vlastním stavem operátoru $\widehat{J}^2$, resp. $\widehat{J}_3$ příslušný vlastní hodnotě $j(j+1)$, resp. m, tj.

$$\widehat{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle\,, \qquad \widehat{J}_3|j,m\rangle = m|j,m\rangle\,.$$

Definujme teď nový stav $|\psi_\pm\rangle = \widehat{J}_\pm|j,m\rangle$. Působení operátoru $\widehat{J}^2$ dává

$$\widehat{J}^2|\psi_\pm\rangle = \widehat{J}^2\widehat{J}_\pm|j,m\rangle = \widehat{J}_\pm\widehat{J}^2|j,m\rangle = \widehat{J}_\pm[j(j+1)|j,m\rangle] = j(j+1)|\psi_\pm\rangle\,,$$

kde jsme využili vztah $[\widehat{J}^2, \widehat{J}_\pm] = 0$ získaný v úkolu b). Podobně pro působení operátoru $\widehat{J}_3$ máme

$$\begin{aligned}\widehat{J}_3|\psi_\pm\rangle &= \widehat{J}_3\widehat{J}_\pm|j,m\rangle = (\widehat{J}_\pm\widehat{J}_3 \pm \widehat{J}_\pm)|j,m\rangle = \widehat{J}_\pm m|j,m\rangle \pm \widehat{J}_\pm|j,m\rangle = \\ &= (m\pm 1)\widehat{J}_\pm|j,m\rangle = (m\pm 1)|\psi_\pm\rangle\,.\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že vektory $|\psi_\pm\rangle = \widehat{J}_\pm|j,m\rangle$ jsou skutečně vlastními vektory operátorů $\widehat{J}^2$, $\widehat{J}_3$, které přísluší stejné hodnotě j jako vektor $|j,m\rangle$, ale jiným hodnotám m, konkrétně třetí komponentu impulsmomentu mění (posouvají) o jedničku.

d) Jako pomocný vztah si chytře rozepíšeme součin operátorů $\widehat{J}_+\widehat{J}_-$.

$$\begin{aligned}\widehat{J}_+\widehat{J}_- &= (\widehat{J}_1 + \mathrm{i}\widehat{J}_2)(\widehat{J}_1 - \mathrm{i}\widehat{J}_2) = \widehat{J}_1^2 - \mathrm{i}\widehat{J}_2\widehat{J}_1 + \mathrm{i}\widehat{J}_1\widehat{J}_2 + \widehat{J}_2^2 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 - \mathrm{i}[\widehat{J}_1, \widehat{J}_2] = \\ &= \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 + \widehat{J}_3\,.\end{aligned}$$

Jistě platí, že $\widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 = \widehat{J}^2 - \widehat{J}_3^2$, což po dosazení dá

$$\widehat{J}_+\widehat{J}_- = \widehat{J}^2 - \widehat{J}_3^2 + \widehat{J}_3\,.$$

Předkládaná rada v zadání nebyla žádným hlubokomyslným tvrzením, ale měla vás vést k výpočtu maticového elementu

$$\langle j,m|\widehat{J}_+\widehat{J}_-|j,m\rangle\,,$$

a to dvěma způsoby. První užije právě získané relace

$$\langle j,m|\widehat{J}_+\widehat{J}_-|j,m\rangle = \langle j,m|\widehat{J}^2 - \widehat{J}_3^2 + \widehat{J}_3|j,m\rangle = j(j+1) - m^2 + m\,.$$

V druhém způsobu uplatníme radu a vyjádříme výsledek pomocí koeficientů $\alpha^{(\pm)}(j,m)$. Porovnáním pak pro ně získáme explicitní vztah. Doteď jsme se zabývali pouze případy, kdy operátor působil vlevo. Tady je však výhodné nechat zapůsobit $\widehat{J}_-$ nalevo, ale $\widehat{J}_+$ napravo.

$$\langle j, m|\widehat{J}_+ = \langle j, m-1|\alpha^{(-)}(j,m)^* \,.$$

Pro maticový element tedy máme

$$\langle j, m|\widehat{J}_+\widehat{J}_-|j, m\rangle = |\alpha^{(-)}(j,m)|^2 \,.$$

Porovnáním výsledků z obou způsobů výpočtu dostaneme

$$\alpha^{(-)}(j,m) = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,.$$

Obdobně počítáním maticového elementu $\langle j, m|\widehat{J}_-\widehat{J}_+|j, m\rangle$ dospějeme k výrazu

$$\alpha^{(+)}(j,m) = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,.$$

Na závěr bych se chtěl omluvit za poněkud techničtější úlohu, ale řešení i podstatně složitějších problémů se často i na toto redukuje a jistá zručnost je v tomto případě nutná. Poděkování patří *Pavlu Motlochovi* za ochotné zaslání TEXovských zdrojových souborů svého řešení (autor si chtěl původně poněkud ulehčit práci). Žel bohu rychlejší myšlenkové pochody Pavlova řešení se moc neslučovaly s pedagogickým cílem, který vzorové řešení sleduje.

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.