

21. ročník, úloha VI. S ... na přání (7 bodů; průměr 4,50; řešili 2 studenti)

Pokuste se o řešení libovolného problému z šesté kapitoly seriálu.

Zadal, nezadal Marek Pechal.

Vyhlička na Zemi

Rovnici trajektorie světelného paprsku v okolí černé díry

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3M}{r^2}$$

nejdříve převedeme do tvaru poněkud vhodnějšího pro numerické řešení. Všimneme si, že

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{dx},$$

kde dx je element vzdálenosti ve směru úhlové souřadnice φ . Označíme-li α úhel, který s tímto směrem svírá směr paprsku v daném bodě (znaménko α volíme kladné, pokud paprsek obíhá v kladném smyslu a přitom se zmenšuje jeho vzdálenost od centra), pak platí

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \alpha.$$

Odtud pak opětovným derivováním dostaneme, že

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{d\varphi} \right) = \frac{1}{r \cos^2 \alpha} \frac{d(\alpha + \varphi)}{d\varphi} - \frac{1}{r}.$$

Dále zřejmě úhel $\alpha + \varphi$ vyjadřuje směr světelného paprsku v daném bodě (tj. natočení vektoru k němu tečného vůči jistému pevně danému vektoru). Označme $\alpha + \varphi \equiv \varphi$. Součin $r d\varphi$ je opět roven elementu dx a ten lze vyjádřit jako $\cos \alpha ds$, kde ds je element dráhy paprsku. Dosazením pak dostáváme

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{\cos^3 \alpha} \frac{d\varphi}{ds}.$$

Použijeme-li pak zadanou rovnici trajektorie, získáme jednoduchý výsledek

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{3M}{r^2} \cos^3 \alpha.$$

Protože však při numerickém výpočtu bude výhodnější pracovat spíše se samotným tečným vektorem než s úhlem popisujícím jeho směr, provedeme ještě další úpravy. Jako \mathbf{n} budeme označovat jednotkový vektor ve směru paprsku, jako \mathbf{r} vektor směřující z počátku souřadnic do příslušného bodu trajektorie a \mathbf{e}_z budiž vektor kolmý k rovině pohybu paprsku (zvolený tak, že vektory \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ a \mathbf{e}_z tvoří kladně orientovanou bázi). Jelikož vektor \mathbf{n} má konstantní jednotkovou velikost, platí $d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0$, tedy $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = 0$. Navíc $\mathbf{n} \times d\mathbf{n} = \mathbf{e}_z \sin(d\varphi) \approx \mathbf{e}_z d\varphi$, odkud plyne $\mathbf{n} \times d\mathbf{n} = \mathbf{e}_z d\varphi$. Vynásobením této rovnosti vektorově vektorem \mathbf{n} zleva a využitím známé identity $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ dostaneme $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}) - d\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z d\varphi$, neboli $d\mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z d\varphi$. Odtud pak ihned dostaneme

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{3M}{r^2} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z \cos^3 \alpha.$$

Využijeme-li dále zřejmé rovnosti $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = r \mathbf{e}_z \cos \alpha$, získáme dosazením

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{3M}{r^5} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) |\mathbf{n} \times \mathbf{r}|^2.$$

Výhodou této vektorové rovnice je, že platí obecně, a nejen pro pohyb v jediné zvolené rovině. Doplníme-li ji o druhou rovnici, která popisuje, jak se při pohybu mění vektor \mathbf{r} , tedy

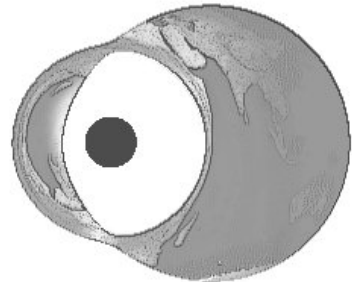
$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{n},$$

dostaneme soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé vektorové funkce $\mathbf{n}(s)$ a $\mathbf{r}(s)$, které můžeme snadno řešit například některou z Runge-Kuttových metod. Získáme tak rovnou trajektorii paprsku parametrizovanou dráhou s .

Můžeme tedy přikročit k samotnému raytracingu, jehož princip byl popsán v zadání. Jednoduše začneme s polohovým vektorem $\mathbf{r}(0)$, který je roven polohovému vektoru pozorovatele, a směrovým vektorem $\mathbf{n}(0)$, který představuje směr pozorovatelova pohledu. Pak řešíme výše uvedenou soustavu ODR a sledujeme, jestli paprsek nezasáhl povrch některého z objektů, které jsme si do 3D scény umístili. Jestliže ano, vykreslíme na příslušné místo promítací roviny bod (jeho barva může být odvozena např. z barvy, struktury a osvětlení zasaženého bodu objektu). Jestliže paprsek nic nezasáhl ani po předem zvoleném maximálním počtu výpočetních kroků, bod nevykreslíme (nebo vykreslíme bod s barvou pozadí¹). Stejně tak, pokud paprsek zmizel pod horizontem černé díry (tj. jeho vzdálenost od ní se zmenšila pod hranici $2M$).

Princip algoritmu, který jsme použili my, je jednoduchý. Každý z objektů ve 3D scéně je reprezentován určitou reálnou funkcí f v třírozměrném prostoru. Kladná hodnota funkce znamená, že příslušný bod je vně objektu, záporná označuje vnitřní body objektu (pro kouli o poloměru 2 a středu v bodě $(1, 2, 3)$ by taková funkce mohla být např. $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 4$). Při numerickém integrování soustavy ODR tedy opakovaně počítáme hodnotu funkce f v bodě \mathbf{r} . Pokud je kladná, pokračujeme ve výpočtu. Jakmile změní znaménko, víme, že paprsek narazil na objekt. Vrátime se tedy o krok nazpátek, zmenšíme krok (např. na polovinu) a postupujeme dále. Tuto proceduru opakujeme, dokud není krok menší než požadovaná přesnost, s jakou chceme průsečík paprsku s povrchem objektu najít.

Náš program jsme obohatili o některé spíše kosmetické drobnosti, jako je možnost stínování



Obr. 1. Vzhled scény složené ze Země se středem v bodě $(0, 0, -3)$ a poloměrem $0,4$ a černé díry o středu $(-0,2; 0; -1,5)$ a poloměru $0,02$ z hlediska pozorovatele v počátku

¹ Ta ovšem nemusí být konstantní. Můžeme předpokládat, že paprsek se dále pohybuje rovnoměrně (provedli jsme velký počet výpočetních kroků, předpokládáme tedy, že se paprsek nachází někde daleko od centra), a vypočítáme, kde protne námi zvolené vzdálené objekty. Těmi může být například krajina, hvězdné nebe apod.

objektu podle libovolně rozmístěných světelných zdrojů (nepočítáme však se stíny, které vrhají samotné objekty, s odrazy ani s ohybem světla ze zdrojů v gravitačním poli – řešení podobných detailů není pro náš účel nezbytné) či nanesení textury na objekt.

Vykreslovali jsme vzhled scény sestávající ze Země, v jejímž okolí se vznáší černá díra. Přitom jsme samozřejmě nebrali v potaz fakt, že by naše drahá planeta byla slapovými silami od takto masivního objektu v okamžiku roztrhána na kousky (naším cílem je pouze znázornit deformaci vzhledu objektů v okolí velmi masivního tělesa). Také jsme neuvažovali frekvenční posuv v gravitačním poli, který by způsobil změnu barvy přicházejícího světla.

V jedné ze simulací jsme pozorovatele posadili do počátku souřadnic a Zemi do bodu o souřadnicích $(0, 0, -3)$. Jednotka délky je zvolena tak, že poloměr Země je roven $0,4$. Do bodu $(-0,2; 0; -1,5)$ jsme umístili černou díru o poloměru $2M = 0,02$ (to odpovídá cca stonásobku hmotnosti Slunce – fatální důsledky pro Zemi i pozorovatele zřejmě netřeba zdůrazňovat). Pozorovatel se dívá proti směru osy z , tedy přímo k Zemi. Značně pokřivený obraz, který uvidí, je znázorněn na obrázku 1.²

Závěrem ještě drobné doznání. Zatajili jsme před vámi jednu nepřesnost našeho modelu. Sférické souřadnice, ve kterých popisujeme pohyb paprsku, jsou pouze matematicky zavedené objekty. Ve velké vzdálenosti od černé díry sice mají stejný význam jako „obyčejné“ sférické souřadnice, čím více se však přibližujeme k horizontu událostí, tím více se od nich liší. Sférické souřadnice, které jsou ze své definice souřadnicemi v plochem časoprostoru, nemůžeme v jejich původním významu přenést do časoprostoru zakřiveného. Jedním z důsledků této komplikace je, že při přechodu od námi použitých „sférických“ souřadnic do souřadné soustavy pozorovatele stojícího v určité vzdálenosti³ R od černé díry musíme vzdálenosti v radiálním směru vydělit faktorem $1 - 2M/R$, zatímco vzdálenosti v tangenciálním směru zůstávají stejné. Striktně vzato tedy námi získané obrázky nejsou zcela přesné, protože směrový vektor paprsku je třeba před začátkem výpočtu netriviálně přetransformovat z pozorovatelových souřadnic do globálních (podobně jako v případě speciálně relativistického raytracingu uvedeného jako příklad v zadání). Oprava však naštěstí spočívá pouze v přeškálování obrázků právě zmíněným faktorem $1 - 2M/R$. Ten se navíc pro naše obrázky liší od jedničky jen řádově o setiny.

Chaotické dvojkyvadlo

Z pohybových rovnic dvojkyvadla jsme si vyjádřili $\ddot{\vartheta}_1$ a $\ddot{\vartheta}_2$ jako funkce $\dot{\vartheta}_1$, $\dot{\vartheta}_2$, ϑ_1 a ϑ_2 . Přitom jsme zvolili $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$ (tedy $\mu = 1/2$ a $\varkappa = 1$) a $\omega = 1$.

Soustavu ODR jsme řešili Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu. Tato metoda je pro většinu aplikací dostatečně přesná, v případě chaotických systémů však ani ona nedokáže poskytnout zcela spolehlivé výsledky. Pokud bychom chtěli skutečně precizně simulovat chování dvojkyvadla, bylo by třeba použít některý ze sofistikovaných algoritmů navržených speciálně pro řešení pohybových rovnic (např. tzv. *symplektické integrátory*). Nás ale spíše než konkrétní stav kyvadla po určité době zajímají statistické aspekty jeho časového vývoje. Můžeme se tedy spokojit i s „méně přesnou“ metodou.

Při každé simulaci jsme nejdříve náhodně nastavili polohu jednoho kyvadla (zvolili jsme náhodně ϑ_1 a ϑ_2 z intervalu $[0, 2\pi)$) a počáteční rychlosti jsme položili rovny nule. Úhly ϑ'_1

²⁾ Další obrázky i program `raytracing_console.pas`, kterým byly vytvořeny, můžete najít na FYKOSích webových stránkách.

³⁾ Dalším příkladem zvrhlého chování prostoru v obecně relativistických situacích je to, že i samotný pojem vzdálenosti přestává být tím, čím se zdá. Pokud například změříme vzdálenost mezi dvěma body pomocí radiolokace, dostaneme jiný výsledek než při „fyzickém“ měření pomocí tuhých tyčí.

a ϑ'_2 pro druhé kyvadlo jsme pak nastavili na k_1 , resp. k_2 -násobek úhlů ϑ_1 , resp. ϑ_2 , kde

$$k_1 = 1 + \varepsilon \sin \alpha,$$

$$k_2 = 1 + \varepsilon \cos \alpha.$$

Tato procedura zajistí, aby relativní odchylka poloh obou dvojkvyadel byla přibližně rovna danému ε a přitom byla náhodně rozdělena mezi úhly ϑ_1 a ϑ_2 podle náhodného parametru α . Pro náš výpočet jsme zvolili $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-10}$ (jde tedy skutečně o velmi malou odchylku).

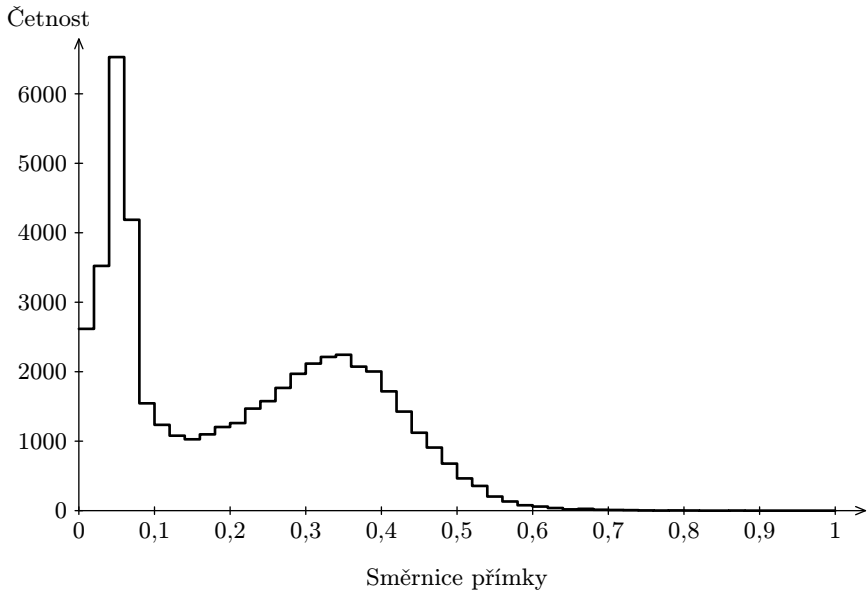
Po nastavení počátečních podmínek jsme prováděli simulaci obou kyvadel (použili jsme integrační krok $dt = 2 \cdot 10^{-4}$) a průběžně sledovali hodnotu odchylky

$$d = (\vartheta_1 - \vartheta'_1)^2 + (\vartheta_2 - \vartheta'_2)^2 + (\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}'_1)^2 + (\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}'_2)^2.$$

Simulaci⁴ jsme zastavili po dosažení času $t = 36$, případně pokud d překročilo hodnotu 1.

Jestliže se vzdálenost obou kyvadel ve fázovém prostoru skutečně zvětšuje přibližně exponenciálně, pak hodnota veličiny $\log d$ roste zhruba lineárně. Závislosti $\log d(t)$ získanou výpočtem jsme tedy proložili přímkou použitím metody nejmenších čtverců a zaznamenali její směrnici (která souvisí s Lyapunovovým koeficientem).

Celý výpočet jsme opakovali 50000krát a vypočtené směrnice jsme znázornili ve formě histogramu (viz obrázek 2).



Obr. 2. Histogram směrníc přímek proložených závislostmi $\log d(t)$

Vidíme, že typicky se hodnota směrnice pohybuje v řádu desetin. Maximální hodnota je přibližně 0,6. V histogramu se sice vyskytují i vyšší hodnoty, ale jejich zastoupení je zanedbatelné.

⁴) Program `chaos_dvojkvyv.pas` naleznete na FYKOSích webových stránkách.

Uvědomme si také, že použitá metoda trpí několika těžko odstranitelnými neduhy – například závislost $\log d(t)$ je lineární jen v dlouhodobém průměru, pro přesnější určení směrnice by tedy bylo třeba provést mnohem delší simulaci (pokud možno v časovém úseku řádově větším, než je typická perioda pohybu dvojkvyvadla). To ovšem není možné, právě protože je studovaný systém chaotický. Aby si obě dvojkvyvadla zůstala po celou dobu výpočtu blízka, musíme jejich počáteční podmínky volit co nejbližší, tedy ε musí být co nejmenší. Zde ovšem narazíme na omezené možnosti počítačové aritmetiky. Jestliže ε příliš zmenšíme, nebude použitý reálný datový typ schopen zachytit takto malé rozdíly v polohách obou dvojkvyvadl.

Získaný výsledek tedy je nutně zatížen chybou, kterou musíme určitým způsobem odhadnout. Provedeme jen velmi hrubý odhad podle charakteru získaného histogramu. Hodnoty směrnice okolo 0,5 jsou již zřejmě zastoupeny statisticky významně, zvolíme tedy chybu cca 0,1 a za maximální hodnotu směrnice vezmeme $0,6 \pm 0,1$.

Nyní již zbývá jen určit hodnotu maximálního Lyapunovova koeficientu. Vzdálenost dvojkvyvadl ve fázovém prostoru se, jak víme, mění s časem přibližně jako $A \exp(\lambda t)$. Veličina d je však druhou mocninou této vzdálenosti, a její logaritmus se tedy mění jako

$$\log d(t) \approx 2(\log A + \lambda t \log e).$$

Směrnice, které jsme počítali, jsou tedy rovny $2\lambda \log e$. Odtud již jednoduše zjistíme, že maximální Lyapunovův koeficient je

$$\lambda_{\max} = (0,7 \pm 0,1).$$

Podívejme se, co to znamená. Maximální Lyapunovův koeficient udává míru předvídatelnosti systému. Co když si sestrojíme dvojkvyvadlo a chceme předvídat, jak se bude pohybovat, když jej vypustíme z dané polohy? Na jak dlouhý časový úsek budeme moci udělat spolehlivou předpověď?

Předpokládejme, že máme k dispozici zázračné experimentální vybavení, které nám umožní při určování počáteční polohy soupeřit s dosud nejpřesnějším měřením vůbec, kterým je určení frekvence hyperjemného přechodu v atomu rubidia na 15 platných číslic. Naše dvojkvyvadlo se tedy stane nepředvídatelným přibližně po uplynutí času T , pro nějž

$$\exp(\lambda T) \approx 10^{15}.$$

Odtud dostaneme $T \approx 50$. Vzhledem k tomu, že jsme na počátku zvolili $\omega = 1$, odpovídá tento časový úsek asi osmi kmitům dvojkvyvadla, což není nikterak oslnivý výsledek.

Marek Pechal

marek@fykos.mff.cuni.cz