Úloha II.S . . . zväzujúca

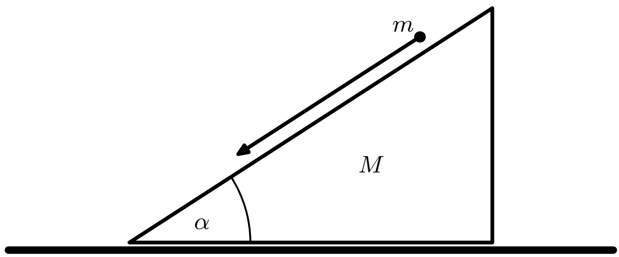
10 bodů; průměr 5,26; řešilo 23 studentů

1. *Majme činku tvorenú dvoma hmotnými bodmi s hmotnosťami m a M, ktoré sú spojené nehmotnou, ale veľmi pevnou tyčou. Táto činka padá voľným pádom. Napíšte väzbovú podmienku a zároveň aj Lagrangeove rovnice prvého druhu pre tento objekt.*
2. *Majme vodorovnú položku, na ktorej je umiestnený pravouhlý trojboký hranol s hmotnosťou M ako na obrázku 1. Po strane tohto hranolu, ktorá s podložkou zviera uhol α, sa skĺzava hmotný bod s hmotnosťou m. V celom príklade neuvažujte trenie.*
   - *Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu.*
   - *Ukážte, že celková hybnosť sústavy v smere osi x je pri nulovej počiatočnej rýchlosti hmotného bodu nulová.*
   - *Postupným riešením sústavy rovníc určte veľkosti rýchlostí hmotného bodu a hranolu v závislosti od času.*
   - *Určte pomer veľkostí týchto rýchlostí.*
3. *Majme kyvadlo zavesené na závese. Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu a ukážte, že pre ňu platí zákon zachovania energie.*

1. Činka pozostáva z dvoch hmotných bodov. Ak uvažujeme, že sa pohybuje v trojrozmernom priestore, bude sada Lagrangeovych rovníc obsahovať dohromady 6 rovníc – tri rovnice pre oba konce činky. Nech súradnice hmotného bodu s hmotnosťou M sú $X,\ Y,\ Z$ a súradnice hmotného bodu s hmotnosťou m sú $x,\ y,\ z$. Ďalej máme jednu väzbovú podmienku, ktorá vraví o tom, že vzdialenosť koncov činky je vždy rovnaká. Vzdialenosť l bodov m a M spočítame ako

$$l = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}\,.$$

Keďže ale vieme, že väzbovú podmeinku budeme derivovať, zapíšeme si ju jednoduchšie



Obr. 1: Naklonená rovina

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2 - l^2 = 0\,.$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžme zvoliť smer gravitačnej sily v smere osy z. Potom budú

Lagrangeove rovnice pre túto sústavu vyzerať

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda\left(x - X\right)\,, \\ m\ddot{y} &= 2\lambda\left(y - Y\right)\,, \\ m\ddot{z} &= 2\lambda\left(z - Z\right) + mg\,, \\ M\ddot{X} &= -2\lambda\left(x - X\right)\,, \\ M\ddot{Y} &= -2\lambda\left(y - Y\right)\,, \\ M\ddot{Z} &= -2\lambda\left(z - Z\right) + Mg\,. \end{aligned}$$

2. V tomto príklade je najdôležitejšie si správne predstaviť celú situáciu, potom už za nás všetku ťažkú prácu spravia pravidlá zavedené v tomto formalizme.
   - Prezačiatok chceme zostaviť Lagrangeove rovnice prvého druhu. Keďže úlohu budeme riešiť dvojrozmerne, budeme mať 4 rovnice. Už na prvý pohľad ale vidíme, že kváder sa nebude pohybovať v smere osy y, takže sústava pohybových rovníc sa nám zredukuje na 3 rovnice. Ako prvé musíme nájsť správnu väzbu. Hmotný bod sa vzhľadom ku kvádru bude pohybovať po priamke so sklonom α. Bude sa teda jednať o lineárnu funkciu so smernicou $\mathrm{tg}\,\alpha$. Za premennú tejto funkcie musíme ale položiť nie x-ovú súradnicu hmotného bodu, ale túto súradnicu musíme posunúť ešte o súradnicu bodu, kde sa hrana kvádra dotýka podložky. Keďže kváder bude vykonávať len posuvný pohyb, môžme bez ujmy na všeobecnosti umiestniť všetku jeho hmotnosť práve do tohto bodu, čo bude mať pre nás veľkú výhodu. Potom budem môcť túto súradnicu stotožniť s x-ovou súradnicou kvádra ako celku. Väzbová podmienka bude teda vyzerať
$$y_1 - (x_1 - x_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0\,,$$
kde súradnice s indexom 1 sú súradnice hmotného bodu a súradnice s indexom 2 sú súradnice kvádra. Ďalej predpokladajme, že smer gravitačnej sily je totožný so smerom osy $-y$. Potom dostaneme Lagrangeove rovnice v tvare
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha\,, \\ m\ddot{y}_1 &= \lambda - mg\,, \\ M\ddot{x}_1 &= \lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha\,. \end{aligned}$$
   - Toto je úloha, ktorá vyžaduje trochu zamyslenia. Dôležité je uvedomiť si, že sila je časová zmena hybnosti. Z Lagrangeovych rovníc je rýchlo vidieť, aká je výsledná sila pôsobiaca v smere osi x. Sčítaním prvej a tretej rovnice dostaneme
$$m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 = 0\,.$$
Ak je sila pôsobiaca v smere osi x nulová, znamená to, že časová zmena hybnosti v tomto smere je nulová, teda že hybnosť v smere x je konštantná. Ak je konštantná, je teda rovnaká ako na začiatku. Na začiatku bola ale celá sústava v pokoji, keďže zo zadania vieme, že počiatočná rýchlosť je nulová. A teda aj celková hybnosť v smere x je po celý čas nulová.
   - Pri riešení Lagrangeovych rovníc použijeme prvý trik so seriálu, a dvakrát zderivujeme väzbu
$$\ddot{y}_1 - \ddot{x}_1\,\mathrm{tg}\,\alpha + \ddot{x}_2\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0\,.$$

Ďalej vyjadríme postupne všetky druhé derivácie z Lagrangeovych rovníc a dosadíme ich do dvakrát zderivovanej väzbovej podmienky. Z tejto rovnice vyjadríme

$$\lambda = \frac{mMg}{M + M\operatorname{tg}^2\alpha + m\operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

Nás až tak nezaujíma tvar λ, podstatné je skôr to, že je to konštanta. Lagrangeove pohybové rovnice teda nadobúdajú jednoduchý tvar typu hmotnosť krát zrýchlenie je nejaká konštanta. Preintegrovať takéto rovnice nebude preto vôbec problém. Dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{\lambda\operatorname{tg}\alpha}{m}t\,,\\ \dot{y}_1 &= \left(\frac{\lambda}{m} - g\right)t\,,\\ \dot{x}_2 &= \frac{\lambda\operatorname{tg}\alpha}{M}t\,.\end{aligned}$$

Integračné konštanty nie sú uvedené, nakoľko majú význam počiatočných rýchlostí a my vieme, že tie boli pre oba predmety nulové. Rýchlosť hmotného bodu bude preto odmocnina zo súčtu kvadrátov zložiek jeho rýchlosti, čo je po dosadení

$$|\boldsymbol{v}_1| = t\sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right) - g\left(\frac{2\lambda}{m} - g\right)}\,.$$

Rýchlosť hranola má len jednu zložku, teda jej veľkosť sa rovná tejto zložke.

- Pomer veľkostí rýchlostí (napríklad rýchlosť hmotného bodu ku rýchlosti hranola) je potom

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M}{\lambda\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right) - g\left(\frac{2\lambda}{m} - g\right)}\,,$$

čo po dosadení za λ a úpravách dáva

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M}{m}\sqrt{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2\operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

3. Úlohu budeme riešiť v dvoch rozmeroch. Pre kyvadlo platí väzbová rovnica

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0\,,$$

kde x, y sú súradnice závažia kyvadla s hmotnosťou m a l je dĺžka závesu kyvadla. Gravitačná sila nech má opäť smer $-y$. Potom budú Lagrangeove rovnice

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= 2\lambda x\,,\\ m\ddot{y} &= 2\lambda y - mg\,.\end{aligned}$$

Najjednoduchšie ako ukázať, že kyvadlo spĺňa zákon zachovania energie, je použiť rovnaký trik ako v seriáli. Prenásobíme teda prvú rovnicu $\dot{x}$ a druhú $\dot{y}$. Následne rovnice sčítame

$$m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}\right) = -mg\dot{y} + 2\lambda\left(x\dot{x} + y\dot{y}\right)\,.$$

Toto si môžeme upraviť ako

$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2+y^2\right)\,.$$

Z väzbovej podmienky vieme, že $x^2+y^2=l^2$, čo je vždy konštanta. Časová derivácia konštanty je nula. Rovnica potom vyzerá

$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0\,.$$

Po preintegrovaní dostaneme

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+mgy=\mathrm{konst}\,,$$

čo je presne formulácia zákona zachovania energie.

Jakub Jambrich
`jakubj@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.