Úloha I.E ... lahvová

12 bodů; průměr 6,49; řešilo 57 studentů

Jak závisí frekvence zvuku, který vydáváte foukáním do skleněné lahve, na objemu kapaliny v lahvi? Diskutujte, jaký vliv na tuto závislost má tvar lahve.

Legolas neumí hrát na žádný hudební nástroj, tak hraje aspoň na nervy.

Teória

Tón je vlastne chvenie vzduchu, a teda vzniká, keď niečo (napr. struna, alebo aj priamo vzduchový stĺpec) kmitá. V našom prípade tón vzniká v hrdle fľaše, kde sa v dôsledku správneho fúkania rozkmitá vzduch a od neho sa už potom vlnenie šíri ďalej.

Frekvenciu, ktorú by sme mali namerať, môžeme odhadnúť tak, že vzduch z hrdla fľaše aproximujeme piestom s rovnakou hustotou ako vzduch.

Označme si okolitý tlak ako p_A a objem hrdla V_h. Potom molárne množstvo vzduchu v hrdle fľaše bude zo stavovej rovnice

$$n_\mathrm{h} = \frac{p_A V_\mathrm{h}}{RT}\,,$$

kde T je teplota a R je univerzálna plynová konštanta $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

Hmotnosť piestu m_h potom dostaneme jednoducho, keď molárne množstvo vzduchu vynásobíme jeho molárnou hmotnosťou, ktorú označíme M_m

$$m_\mathrm{h} = M_m n_\mathrm{h} = M_m \frac{p_A V_\mathrm{h}}{RT}\,.$$

Zostáva zistiť tuhosť systému.

Na začiatku je vo fľaši atmosférický tlak. Následné fúkanie spôsobí, že piest sa pohne o $\mathrm{d}x$ dole, čím vo fľaši tlak určite vzrastie. Keďže kmitanie je príliš rýchle na to, aby si vzduch vo fľaši stíhal vymieňať teplo s okolím, uvažujme adiabatický dej.[1]

Pre adiabatický dej platí, že $pV^\kappa = \mathrm{konst}$, kde κ je Poissonova konštanta charakteristická pre daný plyn.

Tlak teda po posunutí piestu o $\mathrm{d}x$ vzrastie na

$$p_x = p_A \left(\frac{V}{V - S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}\right)^\kappa\,,$$

kde V je pôvodný objem vzduchu vo fľaši a S_h je prierez hrdla.

Na piest bude pôsobiť sila

$$\mathrm{d}F = S_\mathrm{h}(p_A - p_x)\,,$$
$$\mathrm{d}F = S_\mathrm{h} p_A \left(1 - \left(\frac{V - S_\mathrm{h}\mathrm{d}x + S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}{V - S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}\right)^\kappa\right)\,,$$
$$\mathrm{d}F = S_\mathrm{h} p_A \left(1 - \left(1 + \frac{S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}{V - S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}\right)^\kappa\right)\,.$$

Teraz využijeme to, že posun piestu $\mathrm{d}x$ je veľmi malý, takže $V - S_\mathrm{h}\mathrm{d}x \approx V$. Tiež môžeme použiť Bernoulliho vzťah, ktorý hovorí, že $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Premyslite si sami, že z toho vyplýva, že ak je x veľmi malé (oproti 1), máme dobrý odhad $(1+x)^k \approx 1 + kx$.

[1] Ak by sme ale namiesto neho zvolili dej izotermický, veľkej chyby by sme sa nedopustili.

Postupnou aplikáciou týchto dvoch aproximácii dostávame

$$\left(1+\frac{S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}{V-S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}\right)^\kappa \approx \left(1+\frac{S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}{V}\right)^\kappa \approx 1+\kappa\frac{S_\mathrm{h}\mathrm{d}x}{V}\,.$$

Dosadením do vzťahu pre silu máme

$$\mathrm{d}F \approx \frac{\kappa S_\mathrm{h}^2 p_A}{V}\mathrm{d}x\,,$$
$$k \approx \frac{\kappa S_\mathrm{h}^2 p_A}{V}\,,$$

kde k je hľadaná tuhosť systému.

Môžeme teda dosadiť do vzorca pre periódu lineárneho harmonického oscilátora

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,,$$

pričom pri úpravách využijeme $V_\mathrm{h} = S_\mathrm{h}h$, kde h je výška hrdla, a $S_\mathrm{h} = \frac{\pi}{4}D^2$, kde D je priemer hrdla. Po úpravách dostaneme

$$T = \frac{4}{D}\sqrt{\frac{\pi M_m V h}{RT\kappa}}\,.$$

Nie je ťažké všimnúť si, že jediná z týcho veličín, ktorá sa bude meniť prilievaním vody, je objem vzduchu vo fľaši V.

Frekvencia je prevrátená perióda

$$f = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{D}{4}\sqrt{\frac{RT\kappa}{\pi M_m h}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{V}}C\,, \tag{1}$$

kde C je konštanta úmernosti.

Pomôcky

fľaša, voda, váha, odmerka, počítač, posuvné meradlo, teplomer

Meranie

Odvážili sme prázdnu fľašu a potom fľašu plnú vody, rozdiel bol $m_\mathrm{in} = (630 \pm 10)$ g. Ak uvážime hustotu vody $\varrho = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ (väčšia presnosť nie je potrebná, keďže tak či tak máme chybu už na druhej platnej cifre), dostávame, že vnútorný objem fľaše je

$$V_0 = (630 \pm 10)\ \mathrm{cm}^3 = (6{,}3 \pm 0{,}1)\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3\,.$$

Na meranie frekvencie sme používali počítač s programom Audacity, vhodných softwarov ale existuje obrovské množstvo a použiť sa dá aj mobil, ladička... Dôležité je ale uviesť presnosť, s ktorou bola frekvencia zmeraná, v našom prípade to boli desatiny hertza.

Experiment potom prebiehal tak, že sme fúkli do fľaše, poznamenali si frekvenciu, odmerkou (ktorej najmenší dielik je 5 ml) doplnili niekoľko desiatok mililitrov vody a opakovali postup, kým nebola fľaša plná. Namerané hodnoty môžeme vidieť v tabuľke 1.

Tab. 1: Namerané frekvencie zvuku

$\frac{V}{10^{-4}\,\mathrm{m}^3}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$
6,3	185,5
6,1	186,6
5,7	192,5
5,3	206,0
4,9	216,7
4,5	222,6
4,1	228,5
3,3	257,7
2,9	280,3
2,1	316,2
1,7	368,9
1,3	403,8
0,9	479,0
0,7	597,8

Pomocou Gnuplotu dáta fitujeme závislosťou podľa (1)

$$f(V) = \frac{C}{\sqrt{V}}\,,$$

pričom sme dostali, že konštanta $C = (4{,}73 \pm 0{,}05)\ \mathrm{m}^{\frac{3}{2}}{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$. Body s preloženou závislosťou sú vynesené v grafe 1.

Konštantu C by sme mali byť podľa (1) schopní spočítať ako

$$\frac{D}{4}\sqrt{\frac{RT\kappa}{\pi M_m h}} = C\,.$$

Posuvným meradlom odmeriame vnútorný priemer hrdla $D = (2{,}15 \pm 0{,}01)$ cm a výšku hrdla $h = (2{,}04 \pm 0{,}01)$ cm.

Chemické konštanty pre vzduch nájdeme na internete[2] ako $M_m = 28{,}96\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ a $\kappa = 1{,}40$. Izbová teplota vzduchu pri meraní bola (25 ± 1) °C = (298 ± 1) K.

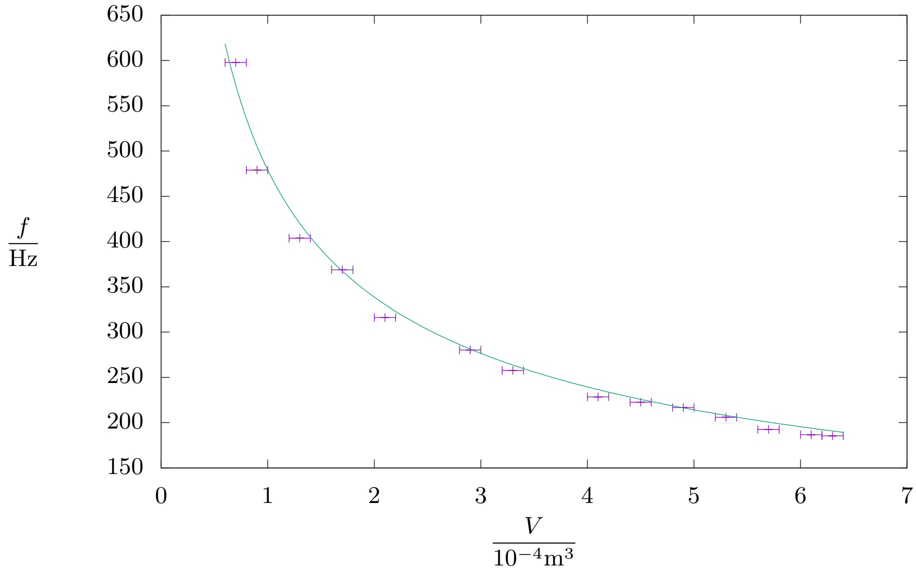
Chyby konštánt oproti nameraným veličinám môžeme považovať za zanedbateľné. Potom dostávame $C = (7{,}35 \pm 0{,}06)\ \mathrm{m}^{\frac{3}{2}}{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$, čo rádovo sedí s experimentálnou hodnotou.

Diskusia

Teoretická predpoveď nám dáva, že nameraná frekvencia by mala byť úmerná objemu vzduchu vo fľaši na mínus jednu polovicu. Namerané dáta tejto závislosti dobre zodpovedajú.

Hodnota C určená experimentálne (z fitu) sa od tej teoretickej dosť líši, aj keď majú rovnaký rád. Dôvod bude zrejme ten, že aj keď náš teoretický model správne odhaduje závislosti na jednotlivých veličinách, v konštante sa môže líšiť, pretože celkový dej je zrejme výrazne zložitejší,

[2] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Vzduch code-4-band`



Obr. 1: Závislosť frekvencie zvuku f na objeme vzduchu vo vnútri fľaše V

než sme uvažovali. Ako príklad môžeme uviesť to, že náš model vôbec neuvažuje kmitanie vzduchu inde než v hrdle, čiže efektívna „hmotnosť piestu“, bude zrejme o niečo vyššia než tá, ktorú sme vo svojich výpočtoch použili. Toto dokonca zodpovedá tomu, že experimentálne sme dostali nižšie C (a teda aj nižšie frekvencie) než predpovedala teória.

Ak by sme namiesto fľaše mali napríklad tenkú trubicu s konštantným prierezom, potom by prvá rezonancie nastala, keď by dĺžka trubice (resp. tej časti v ktorej sa voda nenachádza) l bola rovná štvrtine vlnovej dĺžky. Úpravami dostávame, že v tomto prípade by frekvencia bola nepriamo úmerná objemu vzduchu v trubici. Z toho jasne vyplýva, že na tvare fľaše záleží.

Záver

Dolievaním vody do fľaše znižujeme objem vzduchu, ktorý sa v nej nachádza. Podľa teoretickej predpovede by mala výsledná frekvencia závisieť priamo úmerne na $V^{-\frac{1}{2}}$. Ak teda označíme objem vody vo fľaši V_v, dostávame $f = C(V_0 - V_\mathrm{v})^{-\frac{1}{2}}$. Konštantu úmernosti C sme pre našu fľašu získali experimentálne ako $C = (4{,}73 \pm 0{,}05)\ \mathrm{m}^{\frac{3}{2}}{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$ s relatívnou chybou asi 1 %. Táto hodnota však nie je v zhode s našim teoretickým modelom.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`