Úloha I.P ... ničitel planet

10 bodů; průměr 2,60; řešilo 60 studentů

Jak velká by mohla být co nejmenší a nejlehčí zbraň, která by dokázala zničit planetu? Samozřejmě ještě v rozumném čase v rámci lidského života a čím rychleji, tím lépe.

Karel se moc dívá na sci-fi, tentokrát na titulky Men in Black II.

V této úloze je naším úkolem zamyslet se nad tím, jak zničit planetu. Pod pojmem planeta budeme chápat těleso obíhající kolem nějaké hvězdy, které je dostatečně hmotné na to, aby mělo přibližně kulový tvar a které své okolí vyčistilo od ostatních menších těles. Mírně tak rozšíříme současnou definici[1], abychom se nemuseli omezovat jen na naši Sluneční soustavu. Nyní se musíme zamyslet nad tím, jakým způsobem můžeme takovou planetu zničit. Můžeme ji například

- rozmetat na kousíčky (nebo aspoň na několik kusů),
- stlačit do tak malého objemu, že se z ní stane černá díra,
- vypařit nebo jinak přeměnit většinu její hmoty,
- navést na kolizní dráhu s hvězdou, kolem které obíhá, nebo s jinou planetou.

Někdo by za zničení planety mohl požadovat stav, kdy je na ní vyhuben veškerý život nebo kdy se stane pro život neobyvatelnou. Kvůli všemožným bakteriím a virům je však toto kritérium velmi vágní – některý život dokáže přežít dokonce i ve volném vesmíru, někdy se pro změnu nedokážeme shodnout na tom, co ještě život je a co už není.

Nyní se podíváme na jednotlivé způsoby zničení planety a navrhneme a porovnáme zbraně, které bychom k tomu mohli použít.

Rozmetání na kousíčky

Snad jako první nás napadne umístit doprostřed planety nějakou bombu. Jak silná exploze by to musela být? Spočítejme energii potřebnou k tomu, abychom rozmetali planetu na kousíčky, které spolu gravitačně neinteragují. Určitě je to více energie než potřebujeme, čili tím dostaneme alespoň horní odhad.

Hmotnost planety označme M, její poloměr bude R. Předpokládejme konstantní hustotu ϱ, neboli pro celkovou hmotnost m nacházející se pod poloměrem r platí

$$\frac{m}{r^3} = \frac{M}{R^3} = \frac{4}{3}\pi\varrho\,.$$

Nyní odstraníme „slupku" s poloměrem $\mathrm{d}r$ ve vzdálenosti r od středu. Její hmotnost bude $\mathrm{d}m = \varrho \mathrm{d}V$, kde pro její objem platí $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Gravitační potenciál od zbytku planety je přitom

$$V(r) = -\frac{Gm}{r} = -\frac{4}{3}\pi G r^2 \varrho\,.$$

Na odstranění slupky tak musíme dodat energii

$$\mathrm{d}E = -V(r)\mathrm{d}m = \frac{16}{3}\pi^2 G r^4 \varrho^2 \mathrm{d}r\,.$$

Celkovou dodanou energii spočítáme integrálem přes jednotlivé slupky

$$E_\mathrm{b} = \int_0^R \mathrm{d}E = \frac{16}{3}\pi^2 G\varrho^2 \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\,.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/IAU_definition_of_planet

Tím jsme získali energii potřebnou na zničení planety touto cestou. Samozřejmě jsme zanedbávali gravitační působení ostatních těles.

Pro planetu Zemi by rozmetání vyžadovalo $E_\mathrm{Z} \doteq 2\cdot 10^{32}\,\mathrm{J}$. Mohlo by se to provést například šikovně umístěnou bombou ve středu Země. Pro porovnání, nejsilnější dosud vytvořená bomba jménem Tsar[2] uvolnila energii $E_\mathrm{T} \doteq 2\cdot 10^{17}\,\mathrm{J}$, přičemž její objem byl $V_\mathrm{T} \doteq 30\,\mathrm{m^3}$. Jistě by šlo sestrojit ještě účinnější bombu, nicméně toto je pouze řádový odhad. Objem Země je přibližně $1\cdot 10^{21}\,\mathrm{m^3}$, potřebný objem Tsar bomb by tak byl zhruba $3\cdot 10^{16}\,\mathrm{m^3}$. Nicméně problém je v tom, že veškerá tato energie by se nejspíše nepřeměnila na kinetickou energii zbytků planety, protože nějaká část by se určitě přeměnila na teplo. Navíc, velikost bomby by byla při explozi trochu nepraktická. Nicméně jako řádový odhad to stačí.

Kdybychom netrvali na použití alespoň rámcově představitelných technologií, mohli bychom přemýšlet o bombě vytvořené z antihmoty. Ačkoliv anihilace neproběhne tak rychle, jak bychom mohli myslet díky tomu, že energie vznikající na styčné ploše brání dalšímu kontaktu, za lidský život by se potřebná energie jistě uvolnila. Výrobu antihmoty budeme ještě diskutovat, nyní se zaměříme čistě na její velikost.

Energii antihmoty lze vyjádřit pomocí Einsteinova vzorce jako $E_\mathrm{a} = 2m_\mathrm{a}c^2$, kde faktor 2 značí, že antihmota při anihilaci využije i energii skrytou ve hmotě, se kterou reaguje. Potřebná hmotnost antihmoty je tedy $m_\mathrm{a} = E_\mathrm{a}/\left(2c^2\right)$.

Jako prvek by bylo nejjednodušší použít vodík. Problém je v tom, že s plynným antivodíkem by se nejspíš trochu špatně manipulovalo, pokud bychom ho neuzavřeli do nějaké pevné nádoby (samozřejmě také z antihmoty). Navíc, se samotnými antiprotony bychom si nevystačili, protože ve stlačování by nám zabránila elektrická síla. Mohli bychom vodík zchladit na nějakých $14\,\mathrm{K}$, kdy přejde do pevného skupenství, jenže i to je trochu nepraktické. Druhou možností je pak uchovávání antiprotonů v elektromagnetické pasti, ovšem tak bychom nejspíše nedokázali dosáhnout dostatečné hustoty a výsledná bomba by byla příliš velká.

Předpokládejme tedy, že by se nám podařilo vytvořit nějaký jednoduchý a za běžných podmínek pevný kov, například lithium. Jeho hustota je $\varrho_\mathrm{Li} \approx 500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, čili pro objem zbraně dostáváme

$$V_\mathrm{a} = \frac{E_\mathrm{a}}{2c^2\varrho_\mathrm{Li}}\,.$$

Pro Zemi to dělá cca $2\cdot 10^{12}\,\mathrm{m^3}$, což není vůbec málo. Na druhou stranu vychází o čtyři řády menší objem, než u Tsar bomby.

Rozbití na kusy

Tento způsob je vlastně méně důkladné rozmetání na kousíčky – spokojíme se s tím, že planetu rozbijeme na několik kusů, které výbuchem odmrštíme alespoň o nějakou malou vzdálenost od sebe. Je zřejmé, že k tomu bude stačit méně energie než v předchozím případě. Otázkou ale je, kolik přesně. Mohli bychom naříklad uvažovat rozmetání nějaké části planety, pak bychom potřebovali jen nějaké procento energie výše.

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Tsar_Bomba`

Považujeme za rozumný kompromis scénář, ve kterém rozptýlíme zbytky planety rovnoměrně do oblasti tvaru koule s poloměrem $2R$. Energii potřebnou na takovýto čin lze spočítat pomocí výsledného vzorce z předchozího případu. Představme si, že spotřebujeme energii

$$E(R) = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

na to, abychom kousky planety poslali do nekonečna. Potom je necháme spadnout zpět tak, že zformují soustavu trosek s poloměrem $2R$. Tím získáme zpět energii $E(2R)$. Celková energie tak vychází

$$E = E(R) - E(2R) = \frac{3}{4}E(R) = \frac{3}{4}\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\,.$$

Takto složitým způsobem planetu samozřejmě ničit nebudeme, pouze jsme pomocí něj snadno spočítali potřebnou energii z dříve spočítaného případu. Vidíme, že potřebnou energii jsme zmenšili pouze o čtvrtinu. Nevíme přesně, do jak moc velké oblasti musíme planetu rozptýlit, abychom jí mohli považovat za zničenou, nicméně je rozumné očekávat že to bude něco mezi dvojnásobkem jejího poloměru a nekonečnem, což ale energeticky vychází téměř stejně. Z toho vyplývá, že jako řádový odhad energie lze použít $E(R)$.

Stlačení do černé díry

Stlačení planety do černé díry je určitě náročný úkol, neboť nám v tom brání elektrická síla a jadrové síly, které jsou mnohem silnější než gravitační, která naopak stlačování pomáhá. Mohli bychom ale na planetu vypustit černou díru, která by ji pohltila.

Schwarzschildův poloměr černé díry o hmotnosti m je

$$r_\mathrm{S} = \frac{2Gm}{c^2}\,.$$

Pro typickou planetu je tato hodnota docela malá, řádově centimentry. Intuice napovídá, že černá díra vytvořená z většího tělesa, třeba ze Slunce, by planetu pohltila spolehlivěji. Taková díra by měla poloměr řádově jednotky kilometrů, takže by se jednalo o celkem efektivní zbraň z hlediska velikosti.

Jak by ale přesně černá díra působila na planetu, kdyby se dostala například do jejího středu? Díky své velké hmotnosti by do sebe začala vtahovat hmotu z planety, která by se díky tomu stlačovala a zahřívala, následkem čehož by padající hmota velmi silně vyzařovala. V rozporu s naší intuicí by tak černá díra část planety pohltila, nicméně zbytek planety by v důsledku vznikajícího záření explodoval. Díky zákonu zachování momentu hybnosti by navíc hmota padající do černé díry začala neuvěřitelně rotovat.

Je těžké podat výpočty podložený odhad, jakou velikost černé díry bychom potřebovali, neboť procesů, které se při ničení planety odehrají, je hodně. Navíc vyžadují znalost obecné relativity a obratné řešení diferenciálních rovnic. Odhadněme tedy, že ke zničení planety by stačila černá díra o hmotnosti planety samotné, tedy (v případě Země) se Schwarzschildovým poloměrem v řádu centimentrů.

Zdá se tedy, že jsme narazili na relativně prostorově efektivní způsob, byť je k němu potřeba sehnat a na Zem dopravit těžkou černou díru, což je těžké provést.

Přeměna planety

Pokud bychom nějakým způsobem měnili chemické složení planety, pořád by se jednalo o planetu, takže bychom ji nezničili. Musíme tedy planetu anihilovat kompletně. K anihilaci bychom přitom mohli využít antihmotu. Předpokládejme, že antihmotu můžeme nějakým způsobem vytvořit, přičemž k získání množství o hmotnosti m potřebujeme energii $E_\mathrm{a} = mc^2$. Antihmota při kontaktu s hmotou anihiluje a uvolní jak svojí energii, tak energii hmoty. Tím dostaneme energii $2E_\mathrm{a}$. Můžeme tak vytvořit stroj, který generuje antihmotu, nechává ji anihilovat s hmotou a ze zíkané energie vytváří ještě více antihmoty.

Představme si, že takový stroj máme. Nechť generuje hmotnostní tok antihmoty q. Stroj ale vyrábí tolik antihmoty, na kolik energie má k dispozici, takže tento tok se časem mění podle toho, kolik hmoty již bylo anihilováno. Tento fakt můžeme zapsat pomocí rovnice $q(t+T) = 2\eta q(t)$, kde η je účinnost celého procesu a T je součet času, za který proběhne anihilace, a času, za který se ze získané energie vytvoří nová antihmota.

Řešením této rovnice je například funkce

$$q(t) = q_0 \left(2\eta\right)^{\frac{t}{T}} = q_0 \mathrm{e}^{\frac{t}{T}\ln 2\eta}\,,$$

kde q_0 je nějaký počáteční tok. Nyní můžeme tok q zintegrovat podle času, čímž dostaneme celkovou hmotnost vytvořené antihmoty

$$m_\mathrm{a} = \int_0^\tau q\,\mathrm{d}t = \frac{q_0 T}{\ln 2\eta}\left(\mathrm{e}^{\frac{\tau}{T}\ln 2\eta} - 1\right)\,.$$

Anihilace planety s hmotností M bude úspěšně dokončena ve chvíli, kdy bude platit $m_\mathrm{a} = M$, tedy v čase

$$\tau = \frac{T}{\ln 2\eta}\ln\left(\frac{M\ln 2\eta}{q_0 T} + 1\right)\,.$$

Závislost $M(\tau)$ potom bude exponenciální. Z toho plyne, že pokud budeme mít k disposici zařízení, které dokáže relativně konsistentně z energie tvořit antihmotu a vzniklou antihmotu anihilovat, tak dokážeme planetu zničit extrémně rychle. Není se ale čemu divit, neboť přístroj, který by efektivně zužitkoval jakékoliv množství energie na tvorbu antihmoty není ani zdaleka v dnešních technologických možnostech, lze-li jej vůbec sestrojit. Pro srovnání: doposud lidstvo vytvořilo jen pár nanogramů antihmoty.[3]

Továrna na antihmotu v CERNu[4] má kupříkladu poloměr 30 m, průřez odhadujeme na $1\,\mathrm{m}^2$, tedy má objem V_a řádově desítky metrů krychlových. Jestliže se CERNu podařilo vyrobit $\mu = 1\,\mathrm{ng}$ za řádově $t = 10\,\mathrm{let}$ provozu a my chceme vyprodukovat antihmotu o hmotnosti Země, tak bychom potřebovali celkový objem urychlovačů na zničení planety za $\tau = 100\,\mathrm{let}$

$$V_1 = \frac{M_\mathrm{Z}}{\mu}\frac{t}{\tau}V_\mathrm{a} \approx 10^{35}\,\mathrm{m}^3\,,$$

což je tak o čtrnáct řádů více než její objem.

Pokud bychom nechtěli vytvořit antihmotu o objemu planety, ale spokojili bychom se s energií planet-ničící bomby vypočítané v předcházející sekci, potřebovali bychom k tomu hmotnost

$$m_\mathrm{a} = \frac{E}{2c^2} = \frac{3}{10}\frac{GM^2}{Rc^2}\,.$$

[3] https://www.symmetrymagazine.org/article/april-2015/ten-things-you-might-not-know-about-antimatter
[4] https://home.cern/science/accelerators/antiproton-decelerator

Stačila by přitom polovina energie, neboť při anihilaci dodá druhou polovinu energie hmota. Tomu odpovídá objem

$$V_2 = \frac{3}{10}\frac{GM^2}{Rc^2\mu}\frac{t}{\tau}V_\mathrm{a}\,,$$

kde M je hmotnost planety a R její poloměr. Pro Zemi vychází $V_2 \approx 10^{25}\,\mathrm{m}^3$, což je stále o tři řády více než její objem.

Pád do Slunce

Aby planeta spadla do Slunce, nemůžeme ji jen postrčit, neboť by akorát zaujala jinou oběžnou dráhu. Musíme zastavit její obíhání, a pak se trefí. Samozřejmě nemusíme zastavit oběh úplně, nicméně počítat, jakou maximální oběžnou rychlost planetě můžeme nechat, je komplikované; nám jde stejně pouze o řádový odhad.

Spočítejme si, jak rychle by pád probíhal, kdybychom planetu zastavili najednou. Pohybovala by se po velmi natáhnuté elipse s přísluním v Slunci a tedy s hlavní poloosou $a' = \frac{1}{2}a$, kde a je původní poloosa orbity planety. Z třetího Keplerova zákona dostáváme řešení jako polovinu oběžné doby

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a'^3}{GM}}\,.$$

Pro Zemi dostáváme $T = 65\,\text{dní}$, tedy pád probíhá velmi rychle.

Nyní se zamyslíme nad tím, jakým způsobem můžeme planetu do Slunce shodit. Výhodné je planetu zpomalovat postupně, neboť větší čas působení může znamenat menší zařízení. Mohli bychom třeba na planetu umístit nějaký kanón, který by proti směru rychlosti střílel hmotu, čímž by obíhání zpomaloval. Čelíme problému otáčení planety. Ten by se ale dal vyřešit tím, že bychom umístili symetricky dvě otočné zbraně na oba póly. Kanóny by tak musely vystřelit dohromady hmotu o hybnosti planety $p = mv$.

Pro výpočet rychlosti v použijeme Newtonův první zákon aplikovaný na gravitační a (myšlenou) odstředivou sílu

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{R} &= G\frac{mM}{R^2}\,,\\ v^2 &= G\frac{M}{R}\,,\\ v &= \sqrt{G\frac{M}{R}}\,.\end{aligned}$$

Potřebná hybnost je

$$p = m\sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

Zbývá vyřešit, jakým způsobem by kanón střílel. Mohli bychom například použít laser. Dnešní nejsilnější lasery mají špičkový výkon[5] $W_\mathrm{l} = 1\,\mathrm{PW}$, budeme optimisticky počítat s tím, že to

[5] `https://theconversation.com/worlds-most-powerful-laser-is-2-000-trillion-watts-but-whats-it-for-45891`

je stálý výkon. Za čas τ vydá laser energii $E_l = W_l\tau$. Víme dále, že pro fotony platí $p = h/\lambda$, $E = hc/\lambda$, tedy celkově dostáváme

$$p_l = \frac{E_l}{c} = \frac{W_l\tau}{c} \,.$$

Když za τ dosadíme 100 let jako dobu lidského života, dostaneme při výkonu dnešního nejsilnějšího laseru hybnost $p_l \approx 10^{16}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Oproti tomu hybnost např. Země činí $p_Z \approx 10^{26}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Laser tedy zřejmě nemá dost velkou hybnost na to, aby zastavil rotaci Země, stejně to bude platit i pro jiné planety.

Nabízí se kanón, který by střílel hmotu. Nicméně Saturn 5, jedna z největších raket, kterou lidstvo vypustilo,[6] má tah motorů prvního stupně $F = 35\,\mathrm{MN}$, což dělá dohromady za $t = 100$ let hybnost $p = Ft \approx 1{,}1 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, což je o 9 řádů nižší, než potřebujeme. I střílení hmoty se tedy zdá neproveditelné.

Srovnání

Zmínili jsme čtyři možné způsoby zničení planety: explozi, pohlcení černou dírou, anihilaci a shození do Slunce. Z těchto způsobů nejmenší zbraň potřebovalo zničení planety pomocí černé díry, pokud pomineme nutnost dopravy nebo tvorby černé díry. S našimi předpoklady se bomba ukázala jako energeticky nejefektivnější, byť anihilace by mohla být ještě lepší, pokud bychom dokázali antihmotu vyrábět dostatečně rychle. Shození planety do Slunce se ukázalo jako neproveditelné.

Ničení planety je tedy značně nepraktická záležitost, nicméně je pozitivní, že můžeme dosáhnout úplného zničení přístrojem menším, než je planeta samotná. Závěrem, pokud vás žádný z výše zmíněných způsobů neoslovil, nezbývá než doporučit, abyste zkusili použít vlastní.

Jindřich Dušek
`jindra@fykos.cz`

[6] https://cs.wikipedia.org/wiki/Saturn_V