Úloha III.2 ... bungee

3 body; průměr 1,76; řešilo 85 studentů

Jirka s Káťou si chtějí vyzkoušet bungee-jumping. Na skok z výšky $h = 100\,\mathrm{m}$ mají dokonale pružné lano o délce $l = 40\,\mathrm{m}$, které je kalibrované tak, že když s ním skočí Káťa o hmotnosti $m_\mathrm{K} = 50\,\mathrm{kg}$, zastaví se ve výšce $h_\mathrm{K} = 16\,\mathrm{m}$ nad zemí. Může toto lano bezpečně použít Jirka s hmotností $m_\mathrm{J} = 80\,\mathrm{kg}$? Odpor vzduchu a výšku Káti a Jirky zanedbejte.

Jirkův pokoj na kolejích se nachází inspirativně vysoko.

V úloze nás zajímá pouze počáteční a finální stav, bude tedy výhodné použít výpočet pomocí energií. Konkrétně nás bude zajímat potenciální tíhová energie E_g a potenciální energie pružnosti E_p nataženého lana – jelikož v nejvyšším i v nejnižším bodě dráhy bude rychlost pádu nulová, bude v těchto bodech nulová i kinetická energie E_k. Přitom se nám vyplatí položit nulovou hladinu E_p do výšky $h = 100\,\mathrm{m}$, nikoli do výšky nulové, jak by se mohlo zdát. Uvažme nyní člověka o hmotnosti m, jenž se po seskoku s lanem ze zadání (o neznámé tuhosti k) zastaví ve výšce h_0 nad zemí. Jeho celková energie se nebude měnit, a protože ve výšce h nad terénem jsou hodnoty všech typů energie rovny nule, musí obecně platit

$$E_\mathrm{p} + E_g + E_\mathrm{k} = 0\,. \tag{1}$$

Ve výšce h_0 nad zemí je pak jeho tíhová potenciální energie rovna

$$E_g = m(h_0 - h)g\,, \tag{2}$$

a jak je vidět, pro $h_0 < h$ bude tato energie záporná. Energie pružnosti lana v této výšce je pak

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k(h - h_0 - l)^2\,. \tag{3}$$

Rovnice (3) vychází z obecného vztahu pro potenciální energii pružiny $E_p = ky^2/2$, přičemž si musíme uvědomit, že než se lano začne napínat, uletí padající člověk l metrů, a výchylka y je proto o l menší než rozdíl h_0 a h.

Zajímá nás výška nad terénem, ve které se zastaví Jirka – označíme ji h_J. Dosazením rovnic (2) a (3) do rovnice (1) a uvážením skutečnosti, že Jirkova kinetická energie je ve výšce h_J nulová, dostaneme rovnici

$$m_\mathrm{J}(h_\mathrm{J} - h)g + \frac{1}{2}k(h - h_\mathrm{J} - l)^2 = 0\,. \tag{4}$$

Roznásobením závorek převedeme rovnici do tvaru normované kvadratické rovnice s neznámou h_J, tedy

$$\frac{1}{2}kh_\mathrm{J}^2 + h_\mathrm{J}\left(m_\mathrm{J}g - k\left(h - l\right)\right) - m_\mathrm{J}hg + \frac{1}{2}k\left(h - l\right)^2 = 0\,. \tag{5}$$

U této rovnice nám bohužel žádný trik nepomůže, výsledek proto budeme muset zjistit pomocí diskriminantu. Jeho hodnota je

$$D = \left(m_\mathrm{J}g - k\left(h - l\right)\right)^2 + 2km_\mathrm{J}hg - k^2(h - l)^2 = m_\mathrm{J}g\left(m_\mathrm{J}g + 2kl\right) \tag{6}$$

a s použitím tohoto výsledku již hodnotu h_J získáme jednoduše jako

$$h_{\mathrm{J}1,2} = \frac{k\left(h - l\right) - m_\mathrm{J}g \pm \sqrt{m_\mathrm{J}g\left(m_\mathrm{J}g + 2kl\right)}}{k}\,. \tag{7}$$

Stále však neznáme tuhost lana k. Tu můžeme zjistit díky tomu, že známe všechny ostatní údaje (včetně h_K) pro Kátin skok. Sestavíme rovnici vycházející ze vztahu (4), do nějž pouze dosadíme informace týkající se Káti, a vyjádříme k. Dostaneme

$$k = \frac{2m_\mathrm{K} g \left(h - h_\mathrm{K}\right)}{\left(h - h_\mathrm{K} - l\right)^2} \,. \tag{8}$$

Po dosazení do (7) nám vyjdou dva různé výsledky, a to $h_\mathrm{J1} = 84{,}16\,\mathrm{m}$ a $h_\mathrm{J2} = -1{,}04\,\mathrm{m}$. První výsledek vychází z toho, že v našem matematickém popisu problému je lano interpretováno jako dokonalá pružina nulové délky upevněná ve výšce $h - l$ nad zemí. V tomto případě tedy Jirka „sedí na stlačené pružině“, což však nedává z hlediska popisu seskoku smysl. Správným výsledkem je proto pouze $h_\mathrm{J2} = -1{,}04\,\mathrm{m}$, což znamená, že Jirka by se zastavil asi 1 m *pod* zemí. Pokud tedy Jirka nechce, aby byl tento seskok jeho posledním, měl by použít jiné lano než Káťa.

Jiří Blaha
jirka.b@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.