Úloha I.S ... začínáme slučovat

10 bodů; průměr 3,61; řešilo 28 studentů

1. *Spočítejte energetický výtěžek následujících reakcí a kinetické energie produktů reakce*

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\mathrm{D} + {}^{3}\mathrm{T} &\to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n}\,,\\
{}^{2}\mathrm{D} + {}^{2}\mathrm{D} &\to {}^{3}\mathrm{T} + \mathrm{p}\,,\\
{}^{2}\mathrm{D} + {}^{2}\mathrm{D} &\to {}^{3}\mathrm{He} + \mathrm{n}\,,\\
{}^{3}\mathrm{T} + {}^{3}\mathrm{T} &\to {}^{4}\mathrm{He} + 2\mathrm{n}\,,\\
{}^{3}\mathrm{He} + {}^{3}\mathrm{He} &\to {}^{4}\mathrm{He} + 2\mathrm{p}\,,\\
{}^{3}\mathrm{T} + {}^{3}\mathrm{He} &\to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n} + \mathrm{p}\,,\\
{}^{3}\mathrm{T} + {}^{3}\mathrm{He} &\to {}^{4}\mathrm{He} + {}^{2}\mathrm{D}\,,\\
\mathrm{p} + {}^{11}\mathrm{B} &\to 3\,{}^{4}\mathrm{He}\,,\\
{}^{2}\mathrm{D} + {}^{3}\mathrm{He} &\to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{p}\,.
\end{aligned}
$$

2. *Pomocí grafu rychlosti výtěžku v textu seriálu pro vámi zvolenou teplotu odvoďte Lawsonovo kritérium pro dobu udržení inerciální fúze deuteria s deuteriem, protonu s borem a deuteria s heliem 3 a pro jednotlivé případy určete součin velikosti palivové peletky a hustotu stlačeného paliva. Mají tyto reakce nějakou výhodu oproti tradiční DT fúzi?*
3. *Určete, jak by vypadalo Lawsonovo kritérium pro nemaxwellovské rozdělení rychlostí, kdyby kinetická energie částic byla*
   (a) $E_\mathrm{k} = k_\mathrm{B} T^\alpha$,
   (b) $E_\mathrm{k} = aT^3 + bT^2 + cT$.
   Byla by takováto fúze vůbec realizovatelná? Pokud ano, jaké by mělo být palivo (fúzní reakce), jak velká by měla být palivová peletka a na jakou hustotu by se měla stlačit?

Časť 1

Ako jednotku hmotnosti budeme používať u, atómovú hmotnostnú konštantu, pričom platí, že $1\,\mathrm{u} = 931{,}494\,102\,42\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}} = 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, ak by vám bolo príjemnejšie počítať vo $\mathrm{V{\cdot}c^{-2}}$ alebo kg. Ako prvé si potrebujeme zistiť hmotnosti jednotlivých izotopov a hmotnosť neutrónu. My sme použili[1]

$$
\begin{aligned}
M_{^1\mathrm{H}} &= 1{,}007\,825\,\mathrm{u}\,, & M_{^2\mathrm{D}} &= 2{,}014\,102\,\mathrm{u}\,,\\
M_{^3\mathrm{T}} &= 3{,}016\,049\,\mathrm{u}\,, & M_{^3\mathrm{He}} &= 3{,}016\,029\,\mathrm{u}\,,\\
M_{^4\mathrm{He}} &= 4{,}002\,603\,\mathrm{u}\,, & M_{^{11}\mathrm{B}} &= 11{,}009\,305\,\mathrm{u}\,,
\end{aligned}
$$

$$M_\mathrm{n} = 1{,}008\,664\,915\,\mathrm{u}\,,$$

[1] https://www.chem.ualberta.ca/~massspec/atomic_mass_abund.pdf

ale pozor, tieto hmotnosti sú hmotnosti celého atómu, a to vrátane obalu, tj. elektrónov, ktoré sa na jadrových reakciách nezúčastňujú. Preto od týchto hmotností musíme odčítať hmotnosti príslušného počtu elektrónov,[2] pričom $M_\mathrm{e} = 5{,}485\,799\,090\,7 \cdot 10^{-4}$ u, a tak dostávame

$$M_{^1\mathrm{H}} \approx M_\mathrm{p} = 1{,}007\,276\,42\,\mathrm{u}\,, \quad M_{^2\mathrm{D}} = 2{,}013\,553\,42\,\mathrm{u}\,,$$
$$M_{^3\mathrm{T}} = 3{,}015\,500\,42\,\mathrm{u}\,, \quad M_{^3\mathrm{He}} = 3{,}014\,931\,84\,\mathrm{u}\,,$$
$$M_{^4\mathrm{He}} = 4{,}001\,505\,84\,\mathrm{u}\,, \quad M_{^{11}\mathrm{B}} = 11{,}006\,562\,1\,\mathrm{u}\,.$$

Teraz nám zostáva už len dosadiť do jednotlivých rovníc hmotnosti jadier a spočítať rozdiel energií, viď Tab. 1.

Tab. 1: Tabuľka energetického zisku ΔE pre jednotlivé reakcie, kde M_i je hmotnosť reaktantov, M_o hmotnosť produktov a ΔM je rozdiel M_i a M_o.

reakcia	$\frac{M_\mathrm{i}}{\mathrm{u}}$	$\frac{M_\mathrm{o}}{\mathrm{u}}$	$\frac{\Delta M}{\mathrm{u}}$	$\frac{\Delta E}{\mathrm{MeV}}$
$^2\mathrm{D} + {^3\mathrm{T}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}} + \mathrm{n}$	5,029 053 84	5,010 170 755	0,018 883 085	17,589
$^2\mathrm{D} + {^2\mathrm{D}} \longrightarrow {^3\mathrm{T}} + \mathrm{p}$	4,027 106 84	4,022 776 887	0,004 329 953 47	4,033
$^2\mathrm{D} + {^2\mathrm{D}} \longrightarrow {^3\mathrm{He}} + \mathrm{n}$	4,027 106 84	4,023 596 755	0,003 510 085	3,270
$^3\mathrm{T} + {^3\mathrm{T}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}} + 2\,\mathrm{n}$	6,031 000 84	6,018 835 67	0,012 165 17	11,332
$^3\mathrm{He} + {^3\mathrm{He}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}} + 2\,\mathrm{p}$	6,029 863 68	6,016 058 773	0,013 804 906 94	12,859
$^3\mathrm{T} + {^3\mathrm{He}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}} + \mathrm{n} + \mathrm{p}$	6,030 432 26	6,017 447 222	0,012 985 038 47	12,095
$^3\mathrm{T} + {^3\mathrm{He}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}} + {^2\mathrm{D}}$	6,030 432 26	6,015 059 26	0,015 373	14,320
$\mathrm{p} + {^{11}\mathrm{B}} \longrightarrow 3\,{^4\mathrm{He}}$	12,013 838 57	12,004 517 52	0,009 321 046 53	8,682
$^2\mathrm{D} + {^3\mathrm{He}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}} + \mathrm{p}$	5,028 485 26	5,008 782 307	0,019 702 953 47	18,353

Pre výpočet kinetických energií produktov potrebujeme vedieť dve základné pravidlá:

1. Hybnosť produktov pri dvoj-produktových reakciách je rovnaká $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$, teda $m_1 |v_1| = m_2 |v_2|$.
2. Súčet kinetických energií produktov je rovný uvoľnenej energii $\Delta E = E_{\mathrm{k}1} + E_{\mathrm{k}2}$.

Na základe týchto pravidiel môžeme odvodiť vzťah pre dvoj-produktové reakcie. Prvý produkt reakcie bude mať energiu $E_{\mathrm{k}1} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \Delta E$ a druhý $E_{\mathrm{k}2} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \Delta E$. Potom dostávame

$$^2\mathrm{D} + {^3\mathrm{T}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}}\,(3{,}541\,175\,4\,\mathrm{MeV}) + \mathrm{n}\,(14{,}048\,306\,\mathrm{MeV})\,,$$
$$^2\mathrm{D} + {^2\mathrm{D}} \longrightarrow {^3\mathrm{T}}\,(1{,}009\,917\,9\,\mathrm{MeV}) + \mathrm{p}\,(3{,}023\,408\,1\,\mathrm{MeV})\,,$$
$$^2\mathrm{D} + {^2\mathrm{D}} \longrightarrow {^3\mathrm{He}}\,(0{,}819\,653\,3\,\mathrm{MeV}) + \mathrm{n}\,(2{,}449\,970\,1\,\mathrm{MeV})\,,$$
$$^3\mathrm{T} + {^3\mathrm{He}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}}\,(4{,}793\,602\,1\,\mathrm{MeV}) + {^2\mathrm{D}}\,(9{,}526\,256\,7\,\mathrm{MeV})\,,$$
$$^2\mathrm{D} + {^3\mathrm{He}} \longrightarrow {^4\mathrm{He}}\,(3{,}690\,863\,4\,\mathrm{MeV}) + \mathrm{p}\,(14{,}662\,321\,\mathrm{MeV})\,.$$

Pre troj a viac produktové reakcie toto rozdelenie energií nie je možné numericky spočítať, pretože $\sum_{i=0}^{N} m_i v_i = 0$ a produkty majú spojité spektrum energií, v ktorých sa môžu pohybovať.

[2] Tento postup nie je úplne správny, pretože zanedbávame väzobnú energiu elektrónu.

Časť 2

Do vzťahu

$$n\tau > \frac{12k_\mathrm{B}T}{\langle v\sigma\rangle Q}$$

môžeme dosadiť vzťahy pre rýchlosť rázovej vlny $\tau = \frac{R}{c_\mathrm{s}}$ a hustotu častíc $n = \frac{\rho}{m}$ a dostaneme

$$\frac{\rho R}{mc_\mathrm{s}} > \frac{12k_\mathrm{B}T}{\langle v\sigma\rangle Q}\,,$$
$$\rho R > \frac{12mc_\mathrm{s}k_\mathrm{B}T}{\langle v\sigma\rangle Q} = n\tau mc_\mathrm{s}\,.$$

My sme pre jednotlivé prípady zvolili rovnakú hodnotu $\langle v\sigma\rangle = 5\cdot 10^{-17}\,\mathrm{cm^3s^{-1}}$ a pre ňu sme z grafu odčítali príslušnú teplotu $T_\mathrm{DD} = 45\,\mathrm{keV}$, $T_\mathrm{pB} = 80\,\mathrm{keV}$ a $T_\mathrm{DHe} = 30\,\mathrm{keV}$.

Keďže teplota je už prevedená do eV, tak Lawsonovo kritérium a vzťah pre veľkosť paletky prechádzajú do tvaru

$$n\tau > \frac{12T_\mathrm{eV}}{\langle v\sigma\rangle Q}\,.$$

V týchto rovniciach už len potrebujeme zistiť hmotnosti jednotlivých atómov a z nich vypočítať priemernú hustotu paliva. K tomu môžeme použiť zistené hmotnosti atómov z prvej časti úlohy, pričom $1\,\mathrm{u} = 1{,}660\,539\,04\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}$.

Pre DD reakciu tak máme dva možné scenáre s produktami ^{3}T+p alebo ^{3}He+n. Tieto reakcie majú rovnakú pravdepodobnosť, no my si ich spočítame samostatne. Lawsonovo kritérium pre $^3\mathrm{T} + \mathrm{p}$ je po dosadení

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma\rangle Q} = \frac{12\cdot 45\,\mathrm{keV}}{5\cdot 10^{-17}\,\mathrm{cm^3{\cdot}s^{-1}}\cdot 4{,}033\,\mathrm{MeV}} \doteq 2{,}67\cdot 10^{15}\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-3}}\,,$$

a pre $^3\mathrm{He} + \mathrm{n}$ po dosadení

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma\rangle Q} = \frac{12\cdot 45\,\mathrm{keV}}{5\cdot 10^{-17}\,\mathrm{cm^3{\cdot}s^{-1}}\cdot 3{,}270\,\mathrm{MeV}} \doteq 3{,}30\cdot 10^{15}\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-3}}\,.$$

Palivo tvorí v tomto prípade len ^{2}D a teda $m = m_\mathrm{D}$ a po prevedení na g dostávame $m \doteq 3{,}34\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}$. Po dosadení pre $^3\mathrm{T} + \mathrm{p}$ máme

$$\rho R > n\tau mc_\mathrm{s} = 2{,}67\cdot 10^{15}\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-3}}\cdot 3{,}34\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}\cdot 10^{7}\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}} \doteq 89{,}2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}$$

a pre $^3\mathrm{He} + \mathrm{n}$

$$\rho R > n\tau mc_\mathrm{s} = 3{,}30\cdot 10^{15}\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-3}}\cdot 3{,}34\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}\cdot 10^{7}\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}} \doteq 110\cdot 10^{-3}\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}\,.$$

Obdobne postupujeme aj v prípade $\mathrm{p} + {}^{11}\mathrm{B}$, len s rozdielom, že tu môže nastať iba jeden typ reakcie. Lawsonovo kritérium nadobúda pre tento prípad hodnotu

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma\rangle Q} = \frac{12\cdot 80\,\mathrm{keV}}{5\cdot 10^{-17}\,\mathrm{cm^3s^{-1}}\cdot 8{,}682\,\mathrm{MeV}} \doteq 2{,}21\cdot 10^{15}\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-3}}\,.$$

Teraz je palivo zložené z p a ^{11}B a teda $m = \frac{1}{2}\left(m_\mathrm{p} + m_\mathrm{B}\right)$ a po prevedení na g dostávame $m \doteq 9{,}97\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}$. Po dosadení pre súčin veľkosti paletky a hustoty dostávame

$$\rho R > n\tau mc_\mathrm{s} = 2{,}21\cdot 10^{15}\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-3}}\cdot 9{,}97\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}\cdot 10^{7}\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}} \doteq 220\cdot 10^{-3}\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}\,.$$

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade môže u D + ^{3}He nastať opäť len jeden prípad. Lawsonovo kritérium pre nami zvolené je

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma\rangle Q} = \frac{12\cdot 30\,\mathrm{keV}}{5\cdot 10^{-16}\,\mathrm{cm^3s^{-1}}\cdot 18{,}353\,\mathrm{MeV}} \doteq 3{,}92\cdot 10^{14}\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-3}}\,.$$

Pre tento prípad je palivo zložené z D a ^{3}He a teda $m = \frac{1}{2}(m_\mathrm{D} + m_\mathrm{H})$ a po prevedení na g dostávame $m \doteq 4{,}18\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}$.

$$\rho R > n\tau m c_\mathrm{s} = 3{,}92\cdot 10^{14}\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-3}}\cdot 4{,}18\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}\cdot 10^{7}\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}} = 16{,}4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}\,.$$

Na základe týchto výsledkov vidíme ako sú výhodné reakcie pre nami zvolené parametre. Asi najpodstatnejšie je vidieť, že hodnoty sa líšia najviac o jeden a pol rádu.

Časť 3

Do vzťahu z textu seriálu

$$2nE_\mathrm{k} < \frac{n^2}{4}\langle v\sigma\rangle \tau Q$$

dosadíme za E_k jednotlivé vzťahy zo zadania. Najskôr riešme prípad, kedy $E_\mathrm{k} = k_\mathrm{B}T^\alpha$ a upravujeme

$$\begin{aligned} 2nk_\mathrm{B}T^\alpha &< \frac{n^2}{4}\langle v\sigma\rangle \tau Q\,,\\ 2k_\mathrm{B}T^\alpha &< \frac{n\tau}{4}\langle v\sigma\rangle Q\,,\\ n\tau &> \frac{8k_\mathrm{B}T^\alpha}{\langle v\sigma\rangle Q}\,. \end{aligned}$$

Ako vidíme z výsledného vzťahu pre $\alpha = 1$ dostávame maxwellovské rozdelenie líšiace sa až na konštantu. Pre $\alpha < 1$ môžeme povedať, že $T^\alpha < T$ a teda aj celý výraz na pravej strane bude menší ako pri maxwellovskom rozdelení, takže potrebné $n\tau$ môže byť menšie. Obdobne pre $\alpha > 1$ musí byť $n\tau$ väčšie. Obdobne postupujeme aj pre $E_\mathrm{k} = aT^3 + bT^2 + cT$

$$\begin{aligned} 2nk_\mathrm{B}\left(aT^3 + bT^2 + cT\right) &< \frac{n^2}{4}\langle v\sigma\rangle \tau Q\,,\\ 2k_\mathrm{B}\left(aT^3 + bT^2 + cT\right) &< \frac{n\tau}{4}\langle v\sigma\rangle Q\,,\\ n\tau &> \frac{8k_\mathrm{B}\left(aT^3 + bT^2 + cT\right)}{\langle v\sigma\rangle Q}\,. \end{aligned}$$

Naopak v tomto prípade pre $a, b > 0$ platí $aT^3 + bT^2 + cT > T$ pre všetky T, a teda potrebné $n\tau$ je väčšie ako pre maxwellovské rozdelenie.

Poznámky k došlým řešením

Veľká časť riešení zabudla od hmotnosti atómov odčítať hmotnosť elektrónu, ktorá je približne $m_\mathrm{e} = 0{,}511\,\mathrm{MeV}$, čo je síce oproti hmotnosti jadra zanedbateľné, ale ak si pozrieme výťažky fúznych reakcií, tak vidíme, že sa jedná o zrovnateľnú hodnotu. Niekoľko riešení sa vyskytlo aj s nadmerným zaokrúhľovaním. Ak si uvedomíme, že $1\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}} \sim 0{,}001\,\mathrm{u}$, musíme pri presnosti, ktorú potrebujeme používať aspoň 4-5 desatinných miest, tj. 6 až 7 platných cifier pri použití iných jednotiek (kg, $\mathrm{MeV \cdot c^{-2}}$).

Zároveň sa vyskytli riešenia s neobvyklým riešením, ktoré nešlo podľa textu seriálu, ale s pomocou „Binding Energy“ jadernej energie, ktorú si môžete zistiť z tabuľky.[3] Úskalie tohoto riešenia je, že pre zistenie energií jednotlivých produktov nakoniec aj tak potrebujeme zistiť hmotnosti jadier produktov.

Michal Červeňák
`miso@fykos.cz`

[3] http://dbserv.pnpi.spb.ru/elbib/tablisot/toi98/www/astro/table2.pdf