Úloha V.3 ... pod pokličkou

6 bodů; (chybí statistiky)

Poklička tvaru dutého válce s kruhovým průřezem o poloměru 6,00 cm *leží ve vodorovném umyvadle. Pod ní se nachází vzduch o atmosférickém tlaku* 1 013 hPa*. Při umývání nádobí začneme do umyvadla napouštět vodu o pokojové teplotě. Ta se dostává i pod pokličku a stlačuje tak pod ní uzavřený vzduch. V jistém okamžiku začne poklička plavat. Jak vysoko bude v té chvíli hladina vody? Poklička váží* 200 g*, má výšku* 2,00 cm *a její objem můžete zanedbat.*

Danka myla nádobí.

Označme výšku vody pod poklicí h a mimo poklici H. Objem vzduchu pod poklicí bude

$$V = (a - h)\, S\,,$$

kde a je výška poklice a $S = \pi r^2$ je povrch podstavy poklice. Jelikož je teplota při celém ději konstantní (stejně jako počet částic uzavřeného vzduchu), bude platit stavová rovnice v podobě

$$pV = p_\mathrm{a} V_0\,,$$

kde p je tlak vzduchu pod poklicí a $V_0 = aS$ je jeho počáteční objem. Aby byla splněna rovnováha sil, tento tlak musí být roven hydrostatickému tlaku vody na rozhraní se vzduchem v poklici p_h. Ten spočítáme jednoduše jako

$$p_\mathrm{h} = p_\mathrm{a} + (H - h)\, \rho g\,,$$

kde ρ je hustota vody. Dáme-li všechny rovnice (spolu s podmínkou rovnosti tlaků $p = p_\mathrm{h}$) dohromady, dostaneme

$$(p_\mathrm{a} + (H - h)\, \rho g)\, (a - h)\, S = p_\mathrm{a} V_0\,,$$

což je kvadratická rovnice ve tvaru

$$h^2 - \left(\frac{p_\mathrm{a}}{\rho g} + a + H\right) h + aH = 0\,.$$

Řešením jsou kořeny

$$h = \frac{\left(\frac{p_\mathrm{a}}{\rho g} + a + H\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p_\mathrm{a}}{\rho g} + a + H\right)^2 - 4aH}}{2}\,,$$

kde správně je ten se znaménkem mínus, protože na počátku jsou obě výšky nulové (neboli $h(H = 0) = 0$).

Dále budeme předpokládat, že výška vody ještě nedosáhla poklice, neboli že platí $H < a$. Následně odvodíme podmínku zvednutí poklice a ověříme, zda k tomu dojde před tím, než voda stoupne až nad poklici.[1]

Za tohoto předpokladu působí na poklici ve vertikálním směru jen tři síly (zanedbáme-li objem stěn), a sice tíhová $F_g = mg$, tlaková od uzavřeného vzduchu $F_p = pS$ a tlaková od atmosféry $F_\mathrm{a} = p_\mathrm{a} S$. Celková síla ve směru dolů bude

$$F = F_g + F_\mathrm{a} - F_p = mg + (p_\mathrm{a} - p)\, S = mg - (H - h)\, \rho g S\,,$$

[1] Můžeme si všimnout, že pokud se poklice nezvedne v okamžiku, kdy $H = a$, nezvedne se už nikdy. Vztlaková síla bude stále klesat, zatímco tlak vody shora jenom poroste.

přičemž poklice se zvedne v okamžiku, kdy začne platit $F = 0$, neboli $m = (H - h)\,\rho S$. Dosadíme z rovnice pro h a dostaneme poměrně komplikovaný výraz, ze kterého po několika úpravách vyjádříme

$$H = \frac{m}{\rho S}\left(1 + \frac{a}{\frac{m}{\rho S} + \frac{p_\mathrm{a}}{\rho g}}\right) \approx \frac{m}{\rho S}\left(1 + \frac{a\rho g}{p_\mathrm{a}}\right) \doteq 1{,}78\,\mathrm{cm}\,.$$

Použili jsme hustotu vody $\rho = 997\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Poklice se zvedne ve chvíli, kdy hladina vody stoupne do výšky $H \doteq 1{,}78\,\mathrm{cm}$. Jak vidíme, dojde k tomu před tím, než bude celá pod vodou, takže je vše v pořádku.

Zamyslíme-li se ještě nad výsledkem, zjistíme, že kvůli velmi vysoké hodnotě atmosférického tlaku vychází $a\rho g/p_\mathrm{a} \ll 1$, takže přibližně platí

$$H \approx \frac{m}{\rho S}\,.$$

To by odpovídalo situaci, kdybychom vůbec neuvažovali stlačování vzduchu pod poklicí. Nicméně, výsledek by se po zaokrouhlení lišil na třetí platné cifře, takže tato aproximace není opodstatněná.

Poznámky k došlým řešením

Najčastejšou chybou v došlých riešeniach bol nesprávny rozbor síl. Vztlaková sila na samotnú pokrievku pôsobí, avšak je zanedbateľne malá, keďže objem ponorenej časti pokrievky je veľmi malý. Ale je možné počítať so vztlakovou silou pôsobiacou na časť vzduchu uzavretého pod pokrievkou, ktorý sa nachádza pod úrovňou hladiny vody v umývadle. Táto vztlaková sila, ktorá pôsobí na vzduchový stĺpec, zodpovedá rozdielu tlakových síl atmosferického tlaku a tlaku vzduchu pod pokrievkou, teda $F_\mathrm{a} - F_p$. Niektorí riešitelia dokonca vôbec neuvažovali atmosferický tlak, ktorý ale v tomto príklade hrá dôležitú úlohu. Viacero riešiteľov zanedbalo tiež prítomnosť vody pod pokrievkou, keďže vystúpila do malej výšky. Ako však už bolo spomenuté, takáto aproximácia nás v rámci požadovanej presnosti nedovedie k správnemu výsledku. Navyše, takýto predpoklad je potrebné vždy podložiť výpočtom alebo argumentáciou, prečo je oprávnený.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`