Úloha V.4 ... odpal

7 bodů; (chybí statistiky)

Pták Fykosák odpaloval baseballový míč o hmotnosti m pálkou ve tvaru homogenní tyče s délkovou hustotou λ. Předpokládejme, že tyč je upevněna na jednom svém konci, přičemž se okolo tohoto bodu může otáčet. Fykosák na ni může působit buď konstantním momentem síly M, nebo ji může roztáčet s konstantním výkonem P. Po otočení o úhel $\varphi_0 = 180^\circ$ narazí konec tyče do dosud nehybného míče a dojde k pružné srážce. Při jaké délce tyče l získá míč největší rychlost? Porovnejte obě situace (tj. konstantní M proti konstantnímu P).

Jáchym odpaloval věci.

Nejdříve spočítáme úhlovou rychlost tyče před srážkou (označíme ji ω_0), poté vyřešíme srážku. Dosazením za ω_0 následně dostaneme funkci $v(l)$ a najdeme její extrém.

Hmotnost pálky bude $m_\mathrm{p} = \lambda l$. Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející koncem tyče potom určíme jako

$$J = \frac{1}{3} m_\mathrm{p} l^2 = \frac{1}{3}\lambda l^3 \,.$$

Zabývejme se nyní situací s konstantním výkonem. Kinetická energie tyče v čase t bude $E_\mathrm{k} = Pt$. Tento vztah dosadíme do rovnice pro rotační kinetickou energii, odkud si vyjádříme závislost úhlové rychlosti na čase, tj. zapíšeme

$$Pt = \frac{1}{2} J\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2Pt}{J}} \,. \tag{1}$$

Nás ovšem zajímá závislost ω na úhlu otočení φ. Celý výraz proto zintegrujeme s výsledkem

$$\varphi = \int \omega \,\mathrm{d}t = \int \sqrt{\frac{2Pt}{J}} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2Pt^3}{J}} \,.$$

Za běžných okolností bychom ještě potřebovali dopočítat integrační konstantu, ale v tomto případě je zřejmě $\varphi(t=0) = 0$, díky čemuž je tato konstanta nulová. Vyjádříme si čas v závislosti na úhlu jako

$$t = \left(\frac{9J\varphi^2}{8P}\right)^{\frac{1}{3}} \,,$$

což následně dosadíme do rovnice (1). V dalším kroku tak pro $\varphi_0 = 180^\circ$ získáme úhlovou rychlost ω_0 při odpalu

$$\omega = \left(\frac{3P\varphi}{J}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{l}\left(\frac{9P\varphi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \,,$$

$$\omega_0 = l^{-1}\left(\frac{9\pi P}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \,. \tag{2}$$

V případě konstantního momentu síly bude situace trochu jednodušší, protože platí obdoba rovnice síly $M = J\varepsilon$. Otáčení pálky se tak řídí stejnými vztahy jako rovnoměrně zrychlený pohyb a lze psát

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{M}{2J}t^2 \,,$$

$$\omega = \varepsilon t = \frac{M}{J}\sqrt{\frac{2J\varphi}{M}} = \sqrt{\frac{2M\varphi}{J}} = l^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{6M\varphi}{\lambda}} \,,$$

$$\omega_0 = l^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{6\pi M}{\lambda}} \,. \tag{3}$$

Už nyní můžeme vidět, jak se obě situace liší – konstantní výkon vede na vyšší rychlosti pro delší a těžší pálky než konstantní moment síly. Pokračujme dále vyřešením srážky s míčem. Při ní se zachová jak energie, tak moment hybnosti soustavy. To zapíšeme jako

$$J\omega_0 = J\omega_1 + lmv \,,$$

$$J\omega_0^2 = J\omega_1^2 + mv^2 \,,$$

kde v je výsledná rychlost míče a ω_1 značí výslednou úhlovou rychlost pálky. Druhá jmenovaná veličina nás vzhledem k zadání příliš nezajímá, proto se jí nemusíme zaobírat a rovnou ji z první rovnice dosadíme do druhé, čímž získáme

$$J\omega_0^2 = J\left(\omega_0 - \frac{lm}{J}v\right)^2 + mv^2 \,.$$

Členy $J\omega_0^2$ se nám na obou stranách odečtou, díky čemuž bude v každém zbývajícím členu v alespoň v první mocnině. Kořen $v = 0$ nedává fyzikální smysl, rovnici tedy směle vydělíme v a máme

$$v = \frac{2Jl\omega_0}{l^2m + J} = \frac{2\lambda l^2}{3m + \lambda l}\omega_0 \,.$$

Nyní nezbývá než dosadit za ω_0 z rovnic (2) a (3), výsledné závislosti zderivovat podle l a tyto položit rovné nule. Začneme s $P =$ konst, čímž dostaneme

$$v = 2\left(9\pi P\lambda^2\right)^{\frac{1}{3}}\frac{l}{3m + \lambda l} \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l} = 2\left(9\pi P\lambda^2\right)^{\frac{1}{3}}\frac{3m}{(3m + \lambda l)^2} \,.$$

Tato závislost nemá žádný extrém, což můžeme dobře vidět, když si ji vykreslíme do grafu. Pro kladná l je $v(l)$ stále rostoucí funkcí. Vysvětlení je takové, že roztočit delší pálku trvá déle, takže jí postupně předáme více energie. Nakonec se sice nebude pohybovat tak rychle, ale zato bude mít velmi velkou hybnost.

V případě $M =$ konst platí

$$v = 2\sqrt{6\pi M\lambda}\frac{l^{\frac{1}{2}}}{3m + \lambda l} \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l} = \sqrt{6\pi M\lambda}\frac{(3m - \lambda l)\, l^{-\frac{1}{2}}}{(3m + \lambda l)^2} \,.$$

V tomto případě už extrém existuje, konkrétně pro bod $l = 3m/\lambda$. Letmým pohledem do grafu snadno odhalíme, že jde o maximum.

Reálný lidský výkon je bližší druhé možnosti, tzn. člověk dokáže na pálku působit spíše konstantním momentem než s konstantním výkonem. Z tohoto hlediska je pro co nejdelší odpal ideální volit pálky splňující $l = 3m/\lambda$. Délkovou hustotu typicky neznáme, můžeme ji však určit jako $\lambda = M/l$, kde M je hmotnost pálky. Potom dostáváme ideální poměr $M = 3m$.

Poměr hmotností běžné baseballové pálky a míčku je přibližně 5 až 6, což je dvakrát tolik, než kolik jsme spočítali. Nesmíme nicméně zapomínat na to, že náš model je velmi zjednodušující a neodpovídá přesně skutečným fyziologickým možnostem člověka. Delší pálka má navíc jiné, pro tuto úlohu nerelevantní výhody, například větší dosah a stabilitu. Dále bychom samozřejmě mohli započítat i typicky nenulovou počáteční rychlost míče.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.