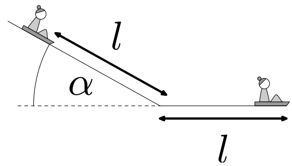
Úloha III.3 ... bobování

5 bodů; průměr 3,44; řešilo 89 studentů



Matěj s Davidem se kloužou na bobech z kopce se sklonem $\alpha = 29^\circ$, který v jeho patě přechází ve vodorovnou zem. Oba vyrazili z klidu ze stejné výšky. Matějovy boby ujedou vždy stejnou vzdálenost l po nakloněné rovině i ve vodorovné části. Protože se při vyšší zátěži boby proboří hlouběji do sněhu, uvažujte, že třecí koeficient je úměrný normálové síle jako $f(F) = kF$, kde k je kladná konstanta. Určete, kolikrát dále dojede Matěj od paty kopce než David, je-li Davidova hmotnost (i s boby) o 12 % vyšší než Matějova. V patě kopce bobaři neztrácí žádnou energii.

Matěj se rád baví o bobech.

Úlohu vyřešíme pomocí zákona zachování energie. Když jsou bobaři na vrcholu kopce o výšce h, mají potenciální energii E_p, která se v průběhu přemění na energii kinetickou E_k a na práci konanou třením W_t. Po dosažení roviny se kinetická energie E_k přemění na práci tření W'_t. Pro práci vykonanou třením platí

$$W_t = F_\mathrm{t} d = f F_\mathrm{N} d = k F_\mathrm{N}^2 d\,,$$

kde d je uražená dráha a F_N normálová síla, pro kterou v tomto případě platí $F_\mathrm{N} = mg\cos\alpha$.

Rozeberme nejdříve pohyb Matěje, u kterého víme, že urazí stejnou dráhu na kopci i po rovince. Označme ji l. Z geometrie kopce je jasné, že jeho výška bude $h = l\sin\alpha$. Napíšeme dvě zmiňované rovnice

$$\begin{aligned} E_\mathrm{pM} &= W_\mathrm{tM} + E_\mathrm{kM}\,,\\ E_\mathrm{kM} &= W'_\mathrm{tM}\,. \end{aligned}$$

které mají po dosazení tvar

$$\begin{aligned} mgl\sin\alpha &= k(mg\cos\alpha)^2 l + E_\mathrm{kM}\,.\\ E_\mathrm{kM} &= k(mg)^2 l\,. \end{aligned}$$

Dále dosadíme z druhé rovnice do první

$$mgl\sin\alpha = k(mg\cos\alpha)^2 l + k(mg)^2 l\,,$$

odkud po úpravě vyjádříme koeficient k jako

$$k = \frac{1}{mg}\frac{\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}\,.$$

Obdobně postupujme u Davida, kde známe hmotnost $m_\mathrm{D} = 1{,}12\,m$, a označme dráhu, kterou urazí na rovince, jako l_D. Dostáváme

$$\begin{aligned} 1{,}12\,mgl\sin\alpha &= k(1{,}12\,mg\cos\alpha)^2 l + E_\mathrm{kD}\,,\\ E_\mathrm{kD} &= k(1{,}12\,mg)^2 l_\mathrm{D}\,. \end{aligned}$$

Znovu vyjádříme za kinetickou energii, k tomu i za koeficient k

$$1{,}12\,mgl\sin\alpha = \frac{1}{mg}\frac{\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}(1{,}12\,mg\cos\alpha)^2 l + \frac{1}{mg}\frac{\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}(1{,}12\,mg)^2 l_\mathrm{D}\,.$$

a finálně najdeme poměr l/l_D jako

$$\frac{l}{l_D} = \frac{1{,}12}{1 - 0{,}12\cos^2\alpha}\,.$$

Stačí dosadit za úhel $\alpha = 29^\circ$ a máme výsledek

$$\frac{l}{l_\mathrm{D}} \doteq 1{,}23\,.$$

Patrik Kašpárek
`patrik.kasparek@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.