

## Úloha VI.E ... minivlny

13 bodů; průměr 7,76; řešilo 33 studentů

Sestavte aparaturu, která bude schopná měřit co nejmenší vlnky na povrchu kapaliny. Nádoby si můžete sami určit – může to být hrnek, láhev či něco jiného. Aparaturu celou řádně popište a vyfotťte. Určete, jakou minimální amplitudu jste schopni naměřit.

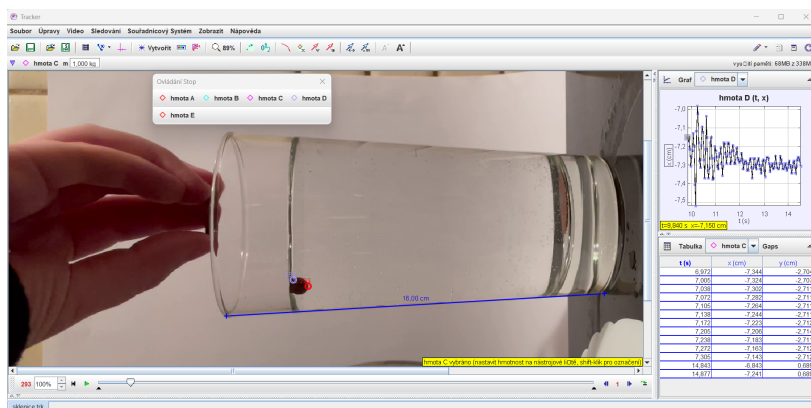
*Karel se díval do blba... totiž psal dizertaci.*

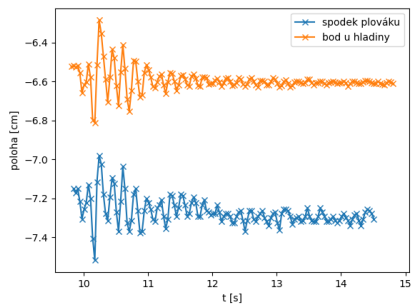
## Úvod

Cílem úlohy je naměřit co nejmenší vlny na vodní hladině. Potřebujeme tedy získat co nejlepší rozlišení s tím, že přesnost pro nás není tak rozhodující. Zároveň potřebujeme měřit průběžně, abychom zaznamenali postupně se snižující amplitudu vln. Nakonec musíme určit, kdy naměřená data ještě odpovídají vlnám a kdy už měříme pouze šum.

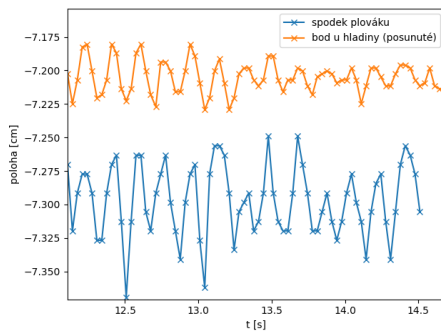
## Postup 1: plovák

**Měření** První metodou, kterou jsme použili, bylo přímé měření hladiny vody pomocí záznamu na video, kde byl použit malý plovák k lepší vizualizaci úrovně hladiny. Jako nádoby byly použity sklenice a větší várnice na čaj kvůli vyzkoušení dvou různých rozměrů. Jako plovák sloužila kulička nového koření. Celý proces byl natáčen na kameru mobilního telefonu, video pak bylo zpracováno v programu *Tracker*. K pozorování byl použit jeden bod na spodní straně plováku a jeden z bodů jeho kontaktu s hladinou, protože střed plováku byl těžko identifikovatelný. Ukázkou ze zpracování videa můžete vidět na obrázku 1.

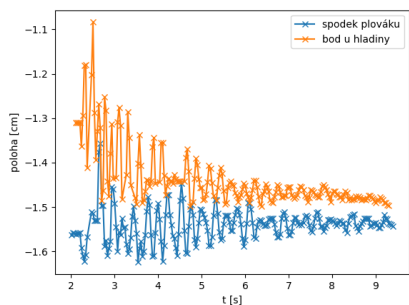




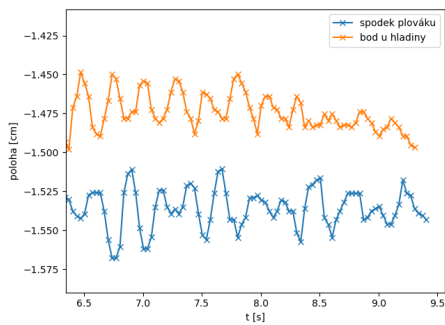
(a) Sklenice



(b) Sklenice – detail



(c) Konvice



(d) Konvice – detail

Obr. 2: Závislost výchylky na čase v obou nádobách, měření pomocí plováku.

**Diskuze** Z poměru naměřené amplitudy a teoretické meze přesnosti jako vzdálenosti dvou pixelů vidíme, že jsme se dostali na technickou hranici takto sestavené aparatury, protože určování výchylek polohy plováku s vyšší přesností než jeden pixel na záznamu je velmi problematické. Z obrázku 2 můžeme vidět, že pro konvici byly naměřené polohy spodku plováku v protifázi s polohami bodu u hladiny, což značí, že plovák měl příliš velkou setrvačnost a nestíhal se změněm přizpůsobit. U sklenice díky jiné frekvenci vlnění tento problém nenastává, avšak tento jev nám naznačuje, že i takto malý plovák může vlnění nezanedbatelně ovlivňovat. Vyšší přesnosti bychom mohli dosáhnout snímáním menšího prostoru, kdy by jeden pixel zobrazoval menší skutečnou vzdálenost.

### Postup 2: odrazy laseru

**Teorie** Druhá metoda spočívala ve využití zákona odrazu paprsku laseru od vodní hladiny. V tomto měření posvítíme na hladinu vody laserem pod malým úhlem od kolmice a pozorujeme pohyb odrazu na vzdáleném stínítku (např. na stropě). Když se hladina vody vychýlí o úhel  $\varphi$ , bude změna úhlu odraženého paprsku  $2\varphi$ . Pokud označíme vzdálenost hladiny od stropu jako  $h$  a výchylku od rovnováhy polohy odrazu paprsku jako  $x$ , můžeme psát pro malé úhly

$$2\varphi \approx \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{x}{h}.$$

Nevýhodou tohoto měření je, že měříme úhel náklonu, a ne přímo amplitudu, kterou musíme z úhlu odhadnout.

Pro odhad amplitudy se tedy nejprve detailněji podíváme na vlnění vody v nádobě. Jelikož je nádoba prostorově omezená, bude u vyvolané vlny docházet k opakovaným odrazům o stěny, až po nějaké době vznikne stojaté vlnění, jehož parametry se pokusíme odhadnout. Stojaté vlnění nemůže mít libovolnou frekvenci a vlnovou délku, ale jeho parametry závisí na rozměrech nádoby a takzvaném módu, což je zjednodušeně počet vln, které se do prostoru (nádobu) vejdu. Jak dále víme, vlnění je tlumené, což je způsobeno zejména viskozitou vody. Tlumení není stejně silné pro všechny módy, ale vyšší módy jsou utlumeny rychleji. Pro náš odhad amplitudy tedy budeme počítat pouze základní mód, přičemž sklenici budeme považovat za rezonátor s volnými konci, jelikož hladina u stěn se také vlní. Pak budeme v nejjednodušším případě uvažovat vlnu s vlnovou délkou rovnou dvojnásobku průměru sklenice  $d$ . Tvar vlny v závislosti na souřadnici  $x$  a čase  $t$  pak můžeme popsat rovnicí

$$A(x, t) = A_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right),$$

kde  $T$  je perioda a  $\lambda$  vlnová délka. Sklon hladiny  $\varphi$ , respektive tangens tohoto úhlu dostaneme derivací podle souřadnice  $x$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_0 2\pi}{\lambda} \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right).$$

Pokud budeme hledat maximum této funkce, položíme kosinus rovný 1, tedy maximální amplitudu dostaneme jako

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_0 2\pi}{\lambda} = \frac{A_0 \pi}{d}.$$

Pokud budeme opět považovat aproximaci malých úhlů a vlnovou délku rovnou dvojnásobku průměru sklenice (tedy maximální kmity uprostřed), můžeme položit tangens úhlu rovný úhlu v radiánech, tedy můžeme psát

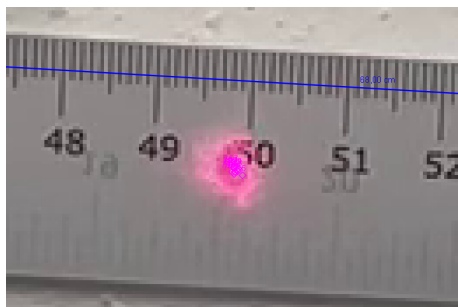
$$\frac{x}{2h} = \frac{A_0\pi}{d} \Rightarrow A_0 = \frac{xd}{2\pi h}, \quad (1)$$

čímž máme odhadnutou maximální amplitudu, kterou může mít námi měřená vlna způsobující výchylku paprsku o  $x$ .

**Postup a výsledky** V našem měření jsme použili červené laserové ukazovátko, které jsme na stole upevnili v držáku a svítili jím na hladinu sklenice vody umístěné na zemi. Jako stínítko jsme použili strop místnosti, na který jsme lepicí páskou upevnili metr. Oblast kolem rovnovážné polohy odrazu jsme pak snímali kamerou na mobilu. Aparatura je zobrazena na obrázku 3a, ukázka odrazu použitého ke zpracování pak na obrázku 3b.



(a) Použitá aparatura



(b) Ukázka naměřených dat

Obr. 3: Měření pomocí odrazu laserového paprsku.

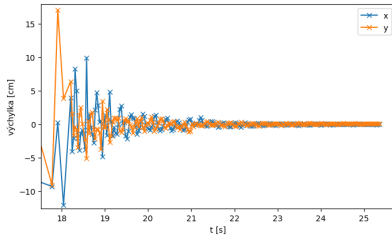
Naměřené polohy odrazu pak byly zpracovány v programu Tracker, který byl zkalibrován pomocí zobrazeného metru. Ostatní parametry aparatury byly naměřeny pásmem nebo posuvným měřítkem a jsou uvedeny v tabulce 1, nejistoty měření byly určeny jako polovina nejmenšího dílku, v případě výšky  $h$  pak součet nejistoty měření výšky místnosti 0,5 cm a nejistoty měření polohy hladiny, kterou jsme z důvodů kapilárních jevů u stěny nádoby odhadli na 1 mm.



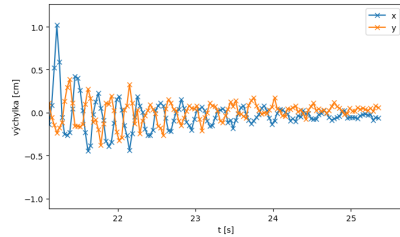
Tab. 1: Parametry měření laserem.

	sklenice	konvice
$\frac{d}{\text{cm}}$	$7,22 \pm 0,05$	$14,3 \pm 0,1$
$\frac{h}{\text{cm}}$	$265,4 \pm 0,6$	$272,9 \pm 0,6$

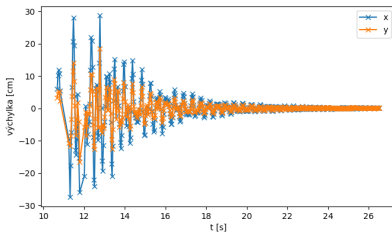
Měření bylo opět prováděno se dvěma nádobami, z nichž každá měla jiný poloměr a jinou výšku hladiny, tudíž byla jiná výška  $h$  od hladiny ke stropu. Z měření v Trackeru byly určeny souřadnice poloh odrazu na jednotlivých snímcích a rovnovážná poloha určena jako jejich průměr. Na obrázku 4 jsou zakresleny výchylky od rovnováhy v obou souřadnicích pro obě nádoby.



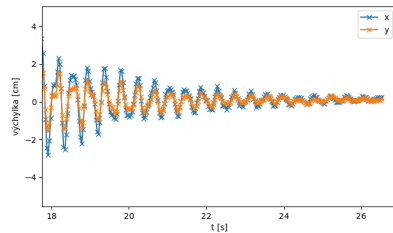
(a) Sklenice



(b) Sklenice – detail



(c) Konvice

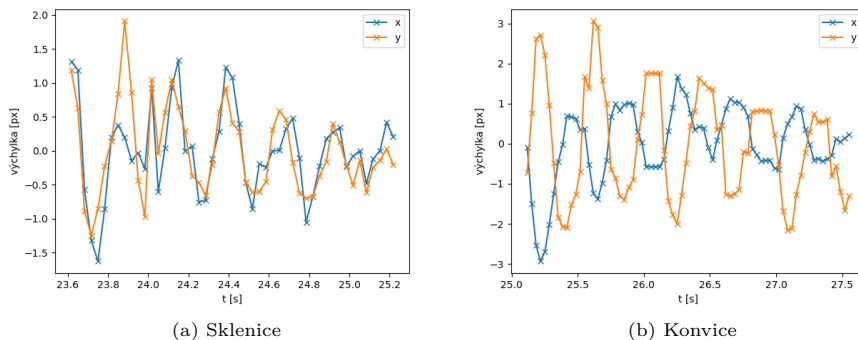


(d) Konvice – detail

Obr. 4: Závislost výchylky laserového odrazu na čase v obou rozměrech.

Z grafů vidíme, že u sklenice můžeme dobře identifikovat vlny do amplitudy 0,2 cm, zatímco pro konvici jen do 0,5 cm. Pro menší amplitudy jsme pak při zpracování dat pozorovali, že změna polohy odrazu laseru je sice poznatelná, ale špatně se určuje střed odrazu, jelikož odraz laseru má na stínítku rozměr téměř půl centimetru. Proto jsme se rozhodli použít k dalšímu zpracování program *Python*, do kterého jsme načetli jednotlivé snímky videa. V těch jsme v červeném kanálu spočítali polohu těžiště odrazu (jako váhu jsme použili intenzitu v červeném kanálu) a tyto

hodnoty použili jako polohy odrazu. Závislost polohy odrazu na čase je vykreslena v grafech na obrázku 5. Jelikož zde již nefungovala kalibrace z Trackeru, jsou hodnoty výchylek uvedeny v pixelech a pro přepočítání jsme použili novou kalibraci určenou z poloh krajních bodů metru. Z této kalibrace vyplývá, že jeden pixel odpovídá 0,58 mm pro měření se sklenicí a 0,39 mm pro měření s várnicí. Jelikož je nejistota určení obou krajních bodů  $\pm 1$  px a vzdálenost těchto bodů odpovídá desítkám pixelů, je nejistota kalibrace menší než 1 %, a tudíž vůči ostatním chybám zanedbatelná.



Obr. 5: Detailní graf výchylek určených pomocí zpracování v Pythonu.

Zde již dokážeme pro měření se sklenicí identifikovat vlny o amplitudě  $0,5 \text{ px} \doteq 0,29 \text{ mm}$  a pro měření s konvicí vlny o amplitudě  $1 \text{ px} \doteq 0,39 \text{ mm}$ . Ve skutečnosti jsou námi naměřené vlny  $\sqrt{2}$ -krát větší, protože amplituda má danou velikost ve dvou na sebe kolmých směrech, pro sklenici tedy máme  $x = 0,41 \text{ mm}$  a pro várnici  $x = 0,55 \text{ mm}$ . Vzhledem k nepřesnosti určení amplitudy odhadujeme nejistotu měření na 10 %, jedná se tedy spíše o řádový odhad, což nám ale v tomto případě příliš nevádí. Po dosazení do vzorce (1) dostaneme amplitudu vlny pro měření ve sklenici  $A_0 = (1,8 \pm 0,1) \text{ } \mu\text{m}$  a pro měření na hladině v konvici  $A_0 = (4,6 \pm 0,5) \text{ } \mu\text{m}$ .

**Diskuze** S touto metodou jsme se dostali na řádově vyšší přesnost, a to na identifikaci vln o amplitudách v řádu mikrometrů. Tato metoda však ve své podstatě měří úhel náklonu hladiny, ze kterého je amplituda jen odhadnuta s předpokladem stojatého vlnění o dané vlnové délce a namíření laseru do jeho uzlu (tj. bodu s největšími sklony). Přesnost určení velikosti amplitudy je tak omezená (jedná se spíše o řádový odhad), avšak z tohoto měření můžeme s velkou jistotou říci, zda se hladina vlní či nikoli. Hlavními problémy tohoto měření je nedokonalost laserového paprsku, který není přesně bodový, a jeho divergence (neboli rozbíhání), kvůli které má stopa na stínítku průměr přibližně půl centimetru. Ke zlepšení citlivosti měření by tak bylo potřeba použít kvalitnější laser s menší stopou. Dalšími nejistotami měření jsou nepřesné kalibrace měření výchylky odrazu laseru, ať už nepřesným určením na fotografii nebo samotným nedokonalým připevněním metru na strop, který byl mírně prohnutý. Dále v tomto měření zanedbáváme změnu vzdálenosti hladiny od stínítka, která je vzhledem k velikosti amplitudy vlny velmi malá.

V této části jsme vlnu považovali za jednorozměrnou a zanedbali tak kruhový tvar sklenice. Pro jeho započtení bychom museli řešit vlnovou rovnici na kruhovém prostoru, což by vedlo na Besselovy funkce s mnoha různými módy. Vzhledem k tomu, že jejich popis je složitý, vzniklé rovnice je nutné řešit numericky a výsledky se liší od aproximace rovinné vlny jen o několik procent, použili jsme zde pouze přibližný postup, který pro náš řádový odhad stačí. Zájemce o přesný popis vlnění na vodní hladině odkazujeme na bakalářskou práci zabývající se tímto tématem.<sup>1</sup>

### Diskuze

Obě měření vln spočívala v co nejpřesnějším pozorování obrazu na videu, ať už se jednalo o plovák v prvním případě, nebo o odraz laseru v druhém případě. Přesnost měření by se tedy dala u obou možností zvýšit použitím kamery s vyšším prostorovým i časovým rozlišením, nebo snímáním menší části prostoru. V případě laseru bychom pak mohli promítat jeho odraz přímo na čip kamery, avšak museli bychom použít vhodné filtry, aby nedošlo k jeho poničení. I s použitím běžného telefonu jsme se však dostali na zlomky milimetru v přímém měření a na jednotky mikrometrů v měření pomocí laserového paprsku, což je velmi dobrá přesnost.

U obou měření nám šlo především o řádový odhad možností použité aparatury spíše než o přesné změření dané vlny, proto jednotlivá měření amplitud mají nejistotu desítky procent. Pokud bychom chtěli dosahovat ještě vyšších přesností, nabízelo by se použití interferometru, který by nám umožňoval měřit s přesností srovnatelnou s vlnovou délkou použitého světla, tedy řádově stovky nanometrů. Konstrukce interferometru by však vyžadovala speciální pomůcky a velmi dobré vyladění aparatury.

### Závěr

Použili jsme dvě metody k měření amplitudy vln na vodní hladině. Při přímém měření amplitudy pomocí záznamu na kameru jsme byli schopni naměřit vlny o amplitudě přibližně 0,2 mm, při měření pomocí odrazu laseru od vodní hladiny jsme se dostali až k vlnám o amplitudě  $(1,8 \pm 0,1)$   $\mu\text{m}$  v případě měření ve sklenici a  $(4,6 \pm 0,5)$   $\mu\text{m}$  v případě měření v konvici na čaj. Měření pomocí odrazu laserového paprsku nám tedy dovolilo měřit až stokrát menší vlny.

**Kateřina Rosická**  
kacka@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

<sup>1</sup>[https://is.muni.cz/th/mqi9u/Peckova\\_Vlny\\_na\\_vodni\\_hladine.pdf](https://is.muni.cz/th/mqi9u/Peckova_Vlny_na_vodni_hladine.pdf)