

Úloha II.S ... na dlhé lake

10 bodů; (chybí statistiky)

1. Zmerajte koľko palcov má váš lakeť. Použiť môžete len svoje časti tela.
2. Prvým pokusom určenia vzdialenosti Zeme od Slnka boli v antike merania uhlovej vzdialenosti Mesiaca od Slnka v okamihu, keď sa Mesiac nachádzal v prvej štvrti – rozhranie svetla a tmy bolo priame. Určte veľkosť tohto uhla a porovnajte ho s uhlovým rozmerom Zeme z pohľadu Mesiaca.
3. Laserový merač vzdialenosti používajúci He-Ne laser ukazuje za štandardných podmienok (20 °C, 100 kPa) vzdialenosť presne 100 m. Ako sa táto hodnota zmení, ak sa zmení:
 - teplota o 30 °C
 - tlak o 10 kPa
 - použije sa zelený laser s vlnovou dĺžkou 532 nm
 - neprevedie sa konverzia medzi grupovou a fázovou rýchlosťou
4. Uvedte aspoň 4 rôzne spôsoby, ktorými sa meria rýchlosť dopravných prostriedkov. Vysvetlite na základe akých fyzikálnych princípov sa rýchlosť určuje a o akú rýchlosť sa jedná.

Dodovi sa rozchádzala kalibrácia spektrografu.

1. Jednotka palec je historicky definovaná ako šírka palca, lakeť ako vzdialenosť medzi lakťovým výbežkom a končekom vystretých prstov. Meranie som vykonal dvomi spôsobmi. Najprv som postupne prikladal palec pravej ruky na predlaktie ľavej ruky. Štyrmi meraniami som získal hodnoty 20, 22, 21 a 22 palcov v lakti. Keďže rozhodnúť, kam položiť palec po jeho odialení od ruky nie je veľmi presné – koža na ruke je elastická a navyše si človek musí pamätať, kam má palec priložiť – som sa rozhodol meranie vykonať aj vynesением poloh konca prostredníka a lakťového výbežku na stôl a následne pri meraní prikladal mierne pritlačené palce ľavej a pravej ruky na striedačku. Týmto postupom som získal hodnoty 23, 23, 22, 23 a 25 palcov na lakeť. Vidíme, že druhý postup merania dáva vyššie hodnoty bez zrejmej príčiny. Ako výslednú hodnotu uvádzam priemer všetkých spomenutých hodnôt s ich smerodajnou odchýlkou $22,3 \pm 1,4$. Pre porovnanie český lakeť mal dĺžku 59,3 cm a staročeský palec dĺžku 24,64 mm, teda asi 24 palcov v jednom lakti.
2. Rozhranie svetla a tmy – terminátor – bude pri pohľade zo Zeme priame, ak bude uhol zovretý Zemou, Mesiacom a Slnkom presne pravý. Uhol zovretý Slnkom, Zemou a Mesiacom Φ tak určíme v tomto pravouhlom trojuholníku s využitím vzdialeností Zeme od Slnka $A = 150 \cdot 10^6$ km a Mesiaca od Zeme $a = 384 \cdot 10^3$ km pomocou funkcie kosínus ako

$$\cos \Phi = \frac{a}{A}, \quad \rightarrow \quad \Phi = \arccos \left(\frac{a}{A} \right) \doteq 89^\circ 51'.$$

Vidíme, že od presne pravého uhla sa líši len o asi 9 oblúčkových minút, zatiaľ čo polomer Zeme pri pohľade z Mesiaca je až o

$$\varphi = \arctg \left(\frac{6400 \text{ km}}{384 \cdot 10^3 \text{ km}} \right) \approx 1^\circ.$$

Poloha pozorovateľa na povrchu Zeme má teda o rád väčší vplyv na skutočne nameraný uhol.

3. V tejto úlohe budeme predpokladať, že laser samotný je voči zmenám teploty a tlaku stabilizovaný a vzduch je suchý. Zmeny vzdialenosti tak budú vznikáť najmä zmenou indexu lomu vzduchu n . Hodnota $n - 1$ je vo vzduchu úmerná jeho hustote. Tá sa dá zo stavovej rovnice ideálneho plynu napísať ako

$$\rho = \frac{pM_m}{RT},$$

kde p je tlak, M_m molárna hmotnosť, R plynová konštanta a T termodynamická teplota. Zo znalosti indexu lomu n_0 pri teplote T_0 a tlaku p_0 tak môžeme dopočítať index lomu pri inej teplote a tlaku ako

$$n(\lambda, T, p) = 1 + (n_0(\lambda) - 1) \frac{pT_0}{p_0T},$$

kde $n_0(\lambda)$ je index lomu pre vlnovú dĺžku λ za referenčných podmienok T_0 , p_0 . Zmena je v podstate spôsobená úmernosťou hodnoty $(n - 1)$ s hustotou vzduchu, a teda počtom častíc, ktoré so žiarením interagujú. Hélium-neónový laser má vlnovú dĺžku $\lambda = 633$ nm, pre ktorú je index lomu vzduchu $n_0 = 1,000\,268$ pri $T_0 = 20$ °C a $p_0 = 100$ kPa. Novú nameranú hodnotu dĺžky l' určíme z novej doby letu svetla $\Delta t'$ ako

$$l' = l \frac{c\Delta t'}{n_0(\lambda)} = l \frac{c \frac{n(\lambda, T, p)}{c}}{n_0(\lambda)} = l \frac{n(\lambda, T, p)}{n_0(\lambda)}.$$

Po dosadení závislosti indexu lomu a úprave dostávame pre zmenu vzdialenosti vzťah

$$\Delta l = l \frac{1 - n_0}{n_0} \left(1 - \frac{pT_0}{p_0T} \right) \approx -l(n_0 - 1) \left(1 - \frac{pT_0}{p_0T} \right).$$

Po dosadení tak dostávame pri poklese teploty o 30 K zmenu dĺžky $\Delta_T l \doteq 3,1$ mm a pri poklese tlaku o 10 kPa zmenu $\Delta_p l \doteq -2,7$ mm. Ak teplota vzrastie o danú hodnotu, potom $\Delta_T l \doteq -2,5$ mm a pri zvýšení tlaku o danú hodnotu dostaneme $\Delta_p l \doteq 2,7$ mm.

Pre zelený laser je index lomu $n_2 = 1,000\,269\,87$ oproti He-Ne, kde $n_1 = 1,000\,268\,243$ ¹. Táto zmena je tak pomere malá, konkrétne len

$$\Delta_\lambda l = l \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx l(n_1 - n_2) = 0,16 \text{ mm}.$$

Predchádzajúce hodnoty indexu lomu boli fázové, nie grupové. Grupový index lomu môžeme odhadnúť² z dvoch predošlých hodnôt ako

$$n_g(\lambda_1) = n(\lambda_1) - \lambda_1 \frac{n_1 - n_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1,0002784, \quad \Delta_g l \doteq 1,0 \text{ mm}.$$

K podobným zmenám dochádza napríklad aj pri meraní radiálnej rýchlosti hviezd v astronómii, ak nie je spektrograf teplotne a tlakovo stabilizovaný. Dôsledkom je, že na detekciu planét o hmotnosti Zeme je takáto stabilizácia nevyhnutná.

¹Online kalkulátor NIST podľa Edlénovej rovnice <https://emtoolbox.nist.gov/Wavelength/Edlen.asp>

²Nahradením derivácie vo vzťahu v seriáli jednoduchým podielom rozdielov.

4. Najjednoduchšou metódou merania rýchlosti je úsekové meranie používané cestnou políciou. Meranou veličinou je čas t , za ktorý vozidlo urazí predom definovanú dráhu s . Rýchlosť určená ako $v = s/t$ je tak priemernou rýchlosťou vozidla na danom úseku voči vozovke.

Inou možnosťou merania rýchlosti používanou v cestnej doprave je dopravný radar. Vyslaná rádiová vlna o frekvencii f sa odrazí od vozidla a vplyvom Doplerovho javu sa jej frekvencia zmení na f' . Meráme tak okamžitú rýchlosť vozidla voči polohe radaru v radiálnom smere

$$v = \frac{f - f'}{f} \frac{c}{2}.$$

Ďalším spôsobom merania rýchlosti, s ktorým sa bežne stretávame je tachometer, ako napríklad v aute. Toto zariadenie v jeho analógovej podobe určuje rýchlosť otáčania hriadeľa, na konci ktorého je permanentný magnet. Tento je z druhej strany obklopený hliníkovým kalíškom, v ktorom budí vírivé elektrické prúdy. Roztočeniu na rýchlosť hriadeľa bráni pružina. Vo výsledku sa tak kalíšok len pootočí o uhol úmerný rýchlosti otáčania hriadeľa. Merané okamžité otáčky kolies sú potom pomocou konštanty – polomeru kolesa – prevedené na indikovanú rýchlosť vozidla. Tu treba spomenúť, že takéto meranie stráca zmysel, ak vozidlo vojde do šmyku.

S komplikovanejšími spôsobmi merania rýchlosti sa stretávame v letectve, kde nedochádza ku kontaktu s pevným povrchom. Lietadlá preto používajú Pitotove trubice – zariadenia merajúce tlak vzduchu a rýchlosť prúdenia pomocou Bernoulliho princípu. Podobne sa dá určiť aj rýchlosť lodí. Z hodnôt statického tlaku p_0 a dynamického tlaku p_1 sa rýchlosť pohybu v nestlačiteľnej tekutine o hustote ρ určí ako

$$v = \sqrt{2 \frac{p_0 - p_1}{\rho}}.$$

V prípade stlačiteľnej tekutiny u lietadiel je situácia komplikovanejšia, navyše komplikovaná aj závislosťou tlaku na výške nad povrchom. V oboch prípadoch však určíme relatívnu rýchlosť pohybu voči tekutine, v ktorej sa pohybujeme. Inou možnosťou je určenie rýchlosti pomocou GPS z polohy a uplynutého času.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.