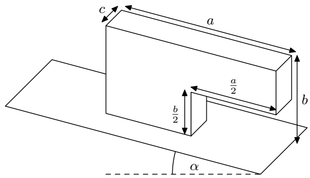
Úloha III.2 ... stabilní ovečka

3 body; průměr 2,65; řešilo 104 studentů

Mějme obdélníkovou desku a na ní položený blok dřeva o rozměrech $a = 20\,\mathrm{cm}$, $b = 10\,\mathrm{cm}$ a $c = 5\,\mathrm{cm}$ (tvar obráceného písmene L, naše aproxiamce tvaru ovce), přičemž hrany desky jsou rovnoběžné k hranám podstavy bloku. Jaký úhel náklonu desky je potřebný, aby se blok převrhnul, pokud ji postupně naklápíme okolo každé z hran desky (viz obrázek)? Předpokládejte, že se blok převrhne dříve, než se začne smýkat.



Dodo sledoval ovce na svahu.

Aby se naše těleso převrátilo, musí dosáhnout labilní polohy, kdy se jeho těžiště dostane mimo plochu průmětu podstavy do svislého směru. Proto musíme zjistit polohu těžiště.

Celé těleso si můžeme představit jako tři menší kvádry, u nichž je těžiště v jejich středu, čímž získáme tři body. Těžiště celého tělesa dostaneme jako průměr těchto tří bodů vážený jejich hmotností

$$T[x,y] = \frac{mA[x,y] + mB[x,y] + mC[x,y]}{3m}\,,$$

kde A, B, C jsou body trojúhelníku a m hmotnost každého z kvádrů.

Spočítejme polohu těžiště vůči bodu, který se nachází na spodní hraně „vykousnutí“. Svislá souřadnice (pokud blok stojí na vodorovné rovině), je ve výšce

$$T_y = \frac{m\frac{b}{4} + m\frac{3b}{4} + m\frac{3b}{4}}{3m} = 5{,}83\,\mathrm{cm}\,.$$

Vodorovná pozice je

$$T_x = \frac{m\frac{a}{4} + m\frac{a}{4} - m\frac{a}{4}}{3m} = 1{,}67\,\mathrm{cm}$$

směrem k zadní (celé) straně.

Poloha těžiště ve třetí dimenzi je ze symetrie útvaru v jeho polovině. Uvažujme, že desku s útvarem začneme naklánět kolem osy, která je na straně „vykousnutí“. Najdeme pravoúhlý trojúhelník, jehož body jsou těžiště tělesa, kolmý průmět těžiště do podstavy a bod O, kolem kterého budeme těleso převracet (leží na obvodu podstavy). Z trojúhelníku pak zjistíme úhel α pro dosažení labilní polohy jako

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{T_x}{T_y}\,,$$

kde T_y je výška těžiště nad podstavou a T_x je vzdálenost jeho průmětu do nakloněné roviny od hrany podstavy. Číselně dostáváme $\alpha_1 = 15{,}9\,^\circ$.

Analogicky, pokud „vykousnutí“ směřuje směrem nahoru, tedy když desku otáčíme okolo osy na druhé straně útvaru, dostaneme pro úhel podmínku

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\frac{a}{2} - T_x}{T_y} \quad\Rightarrow\quad \alpha_2 = 55{,}0\,^\circ\,.$$

Ještě desku můžeme natáčet kolem hrany rovnoběžné s nejdelším rozměrem útvaru. Zde dostáváme podmínku

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\frac{c}{2}}{T_y} \quad\Rightarrow\quad \alpha_3 = 23{,}2\,^\circ\,.$$

Vidíme, že maximální úhel, kdy se útvar ještě nepřevrhne, se výrazně mění v závislosti na poloze tělesa. Ovce na strmém svahu žerou vždy hlavou do kopce.

Adam Roštejnský
adam.rostejnsky@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.