# 1 Goniometrie

Goniometrie je v obecnosti věda o měření úhlů. Její speciální částí je trigonometrie, která zkoumá vlastnosti úhlů v trojúhelnících (převážně v ploché geometrii). Historicky se pracovalo spíše s délkami úseček než s úhly, goniometrické funkce sinus a kosinus byly poprvé používány ve starověké Indii a postupně se přes arabskou kulturu dostaly do Evropy.

Trojúhelník je jeden z nejjednodušších geometrických útvarů, z toho je zřejmé, že využití goniometrických funkcí v geometrie bude široké. Pro fyzika jsou funkce sinus a kosinus důležité také proto, že vyvstávají při řešení rovnice harmonického oscilátorů, který je základem mnoha fyzikálních modelů.

Cílem této kapitoly vztahy mezi goniometrickými funkcemi, zopakovat si důležité věty v trojúhelníku (sinová, kosinová), zmínit se o chování těchto funkcí vůči operacím derivace a integrace a stručně nastínit jejich využití ve fyzice.

## 1.1 Zavedení goniometrických funkcí

Tradičně zavádíme goniometrické funkce pomocí pravoúhlého trojúhelníku. V trojúhelníku ABC se standardním značením (obr. 1) zavedeme funkci sinus jako poměr délek protilehlé odvěsny a přepony, tedy

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,.$$

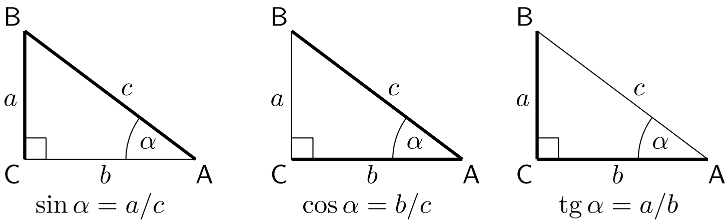
Podobně zavádíme funkci kosinus jakožto poměr délek přilehlé odvěsny a přepony

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\,.$$

Další dvě goniometrické funkce, tangens a kotangens, vyjadřují poměry mezi odvěsnami. Můžeme je však definovat také pomocí již zavedených funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}\,,\\ \operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}\,.\end{aligned}$$

Vidíme, že kotangens je pouze převrácenou hodnotou funkce tangens, proto se v praxi příliš nepoužívá. [1]




Obrázek 1: Definice trigonometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku.

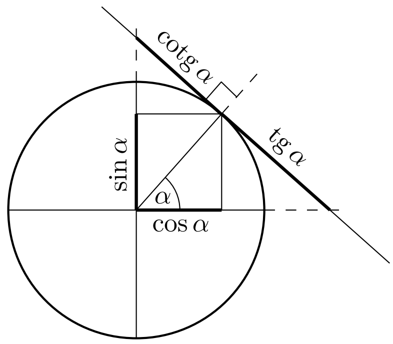
Pro rychlé výpočty je praktické zapamatovat si hodnoty trigonometrických funkcí pro hodnoty úhlů $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$. Přehledně je uvádí tabulka 1. Stane-li se, že tyto hodnoty zapomenete, nic se neděje – na základě Pythagorovy věty je dokážete velmi rychle zjistit. Pro jiné význačné úhly (15°, 10°) zjistíme přesné hodnoty nejsnáze pomocí trigonometrických identit, viz kapitola 1.2.

[1] Na většině kalkulaček funkci kotangens ani nenajdete – neplést s $\operatorname{tg}^{-1}$!

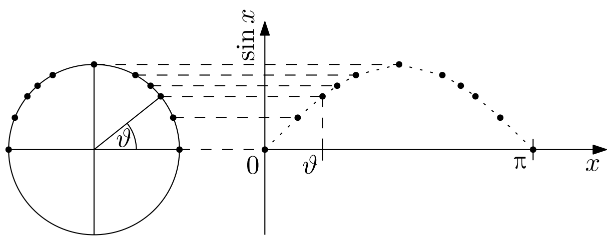
Tabulka 1: Tabulka s význačnými hodnotami trigonometrických funkcí.

| $x$ [°] | $\sin x$ | $\cos x$ | $\operatorname{tg} x$ | $\operatorname{cotg} x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | – |
| 30 | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{3}$ |
| 45 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 | 1 |
| 60 | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}/3$ |
| 90 | 1 | 0 | – | 0 |

Nyní se podívejme na důležité vlastnosti trigonometrických funkcí. Zatímco na obrázku 1 může úhel $\alpha$ nabývat pouze hodnot v rozmezí[2] $[0°, 90°]$, je definičním oborem funkcí sinus a kosinus celý obor reálných čísel (pro komplexní argumenty viz rozšiřující sekci 1.6). Jak provedeme toto rozšíření oboru je zřejmé z jednotkové kružnice na obrázku 2, pomocí níž jednak definujeme obloukovou míru[3] $2\pi\,\mathrm{rad} = 360°$ a jednak na ní můžeme zkonstruovat orientovaný středový úhel nabývající libovolné reálné hodnoty. Vynesení hodnot funkcí sinus z jednotkové kružnice do grafu ukazuje obrázek 3.




Obrázek 2: Geometrické vyobrazení hodnot trigonometrických funkcí pro úhel $\alpha$.




Obrázek 3: Přenesení hodnot funkce sinus z jednotkové kružnice do grafu.

Snadno si povšimneme platnosti vztahu (otočte si jednotkovou kružnici o 90°)

$$\sin x + \pi/2 = \cos x\,,$$

proto si popíšeme pouze vlastnosti funkce sinus. Opět z obrázku nahlédneme, že funkční hodnoty se začnou opakovat po přičtení $2\pi$, jedná se tedy o funkci $2\pi$-periodickou. Obor hodnot leží v intervalu $[-1,1]$. Pokud začneme s nulovým úhlem a postupně snižujeme jeho velikost, dostáváme stejné hodnoty funkce, jako kdybychom úhel zvětšovali, pouze s opačným znaménkem – jde tedy o lichou funkci. V

[2]Použitím uzavřeného intervalu připouštíme úsečku jakožto degenerovaný trojúhelník.
[3]Je zvykem značku „rad“ vynechávat.

případě funkce kosinus budou funkční hodnoty pro obě orientace úhlu stejné, tudíž kosinus je funkce sudá.

Mezi funkcemi tangens a kotangens platí vztah

$$\mathrm{tg}(-x + \pi/2) = \mathrm{cotg}(x)\,,$$

proto rozebereme pouze funkci tangens. Její definiční obor lze zadat jako $\mathbb{R} - \{(k + 1/2)\pi\}, k \in \mathbb{Z}$. Je tedy definována všude kromě $(k + 1/2)$-násobků čísla $\pi$, v nichž má nespojitost druhého druhu s levostrannou limitou $\infty$ a pravostrannou $-\infty$. Na rozdíl od funkce sinus je $\pi$-periodická a je také lichá – lichá je i funkce kotangens kvůli vztahu $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{cotg}\, x$. Oborem hodnot funkce tangens je $\mathbb{R}$.

Jelikož žádná ze zmíněných trigonometrických funkcí není prostá, je zřejmé, že při definici inverzních funkcí (občas nazývaných cyklometrické) budeme muset provést restrikce. K funkci sinus zavádíme inverzní funkci arkus sinus na intervalu $x \in [-1, 1]$ a značíme ji[4] $\arcsin x$. Tomuto definičnímu oboru odpovídá podle funkce $\sin x$ obor hodnot $[-\pi/2, \pi/2]$. Jedná se o prostou (rostoucí), lichou, neperiodickou funkci. Funkce $\arccos x$ je definována taktéž na intervalu $[-1, 1]$ s oborem hodnot $[0, \pi]$, je klesající, neperiodická a není ani sudá, ani lichá. V principu by bylo možné definovat tyto funkce na jiných periodách sinu a kosinu, jedná se o konvenci. Funkce $\mathrm{arctg}\, x$ má definiční obor $(-\infty, \infty)$, obor hodnot $(-\pi/2, \pi/2)$, je rostoucí, lichá a neperiodická. I zde platí, že obor hodnot je pouze konvenční a mohl by být vybrán z jiných period.

Další vlastnosti těchto funkcí rozebereme v sekci 1.4.

## 1.2 Důležité trigonometrické identity

Nejznámější a nejpoužívanější identita k převádění mezi sinem a kosinem je

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,.$$

Říká se jí také často Pythagorova věta, neboť

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1\,.$$

Dále jsou v praxi, například při skládání rotací, hojně využívány tzv. součtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\,,$$
$$\cos x \pm y = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\,,$$

přičemž si pamatujeme pouze sčítací vzorec a odečítací odvodíme přičtením $-y$. Na základě těchto vzorců lze odvodit (zkuste si sami) zřídka používaný a hůře zapamatovatelný součtový vzorec pro tangens

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}\,.$$

Vhodné je pamatovat si speciální případ $x = y$, tj, vzorce pro dvojnásobné úhly

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x\,,$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x\,.$$

[4]Předpona arc- nám říká, že hledáme velikost oblouku (v jednotkové kružnici to samé jako příslušný středový úhel), jemuž přísluší hodnota $\sin x$.

Druhý z těchto vzorců lze pomocí Pythagorovy věty zapsat jako $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, pak po substituci $y = 2x$ získáme vzorec pro poloviční úhel[5]

$$\sin\frac{y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos y}{2}}\,.$$

Podobně můžeme použít vyjádření $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ a stejnou substitucí odvodit

$$\cos\frac{y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos y}{2}}\,.$$

Poslední vztah, který zde uvedeme, je hůře zapamatovatelný a také není snadné ho odvodit (pokud nepoužijeme komplexní vyjádření, viz sekce 1.7). Je však užitečný, neboť převádí součet goniometrických funkcí na součin:

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right)\,.$$

Ve speciálních případech samozřejmě mohou být užitečné i jiné identity, ale v takových chvílích není hanbou sáhnout po tabulkách nebo hledat na internetu.

## 1.3 Věty pro trojúhelník

Pro práci s obecnými trojúhelníky, kde neplatí Pythagorova věta a goniometrické funkce nelze vyjádřit jako poměry stran, používáme následující věty.

Sinová věta lze snadno odvodit na základě vzorce pro obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ch_{\mathrm{c}}$, kde $h_{\mathrm{c}}$ je výška spuštěná na stranu $c$. Pokud k vyjádření obsahu využijeme i zbylé dvě strany, dostaneme rovnost

$$\frac{1}{2}cb\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ba\sin\gamma\,,$$

jež po vynásobení $2/(abc)$ dostane tvar

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\,,$$

kterému říkáme sinová věta.

Zobecněním Pythagorovy věty je kosinová věta. Existuje mnoho způsobů jak ji odvodit, nejrychlejší a obecný způsob je následující: Z počátku kartézského souřadného systému $\mathsf{C} = (0,0)$ nakreslíme dva vektory o velikostech $a$, $b$ svírající úhel $\gamma$, přičemž vektor $\boldsymbol{a}$ leží v kladném směru osy $x$. Odečtením vektoru $b$ od vektoru $a$ získáme délku

$$c = \sqrt{(a - b\cos\gamma)^2 + (0 - b\sin\gamma)^2}\,,$$

která představuje třetí stranu trojúhelníku. Umocněním obou stran rovnice a roznásobením druhých mocnin dostaneme rovnici do tvaru

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$$

což je obvyklé vyjádření kosinové věty.

Sinovou a kosinovou větu používáme v případě, kdy máme obecném trojúhelníku zadány dvě strany a úhel nebo stranu a dva úhly a naším úkolem je určit nějakou ze zbylých stran či úhlů. Může ovšem nastat případ, kdy zadané údaje mohou určovat dva různé trojúhelníky. Zda je druhé získané

[5]Znaménko $\pm$ se zde nevztahuje k žádnému z předchozích vzorců, nýbrž pouze naznačuje, že pokud je hodnota výrazu nalevo kladná, měli bychom napravo zvolit znaménko plus (podobně pro záporné hodnoty).

řešení zjistíme nejsnáze tak, že ověříme, zda není porušena trojúhelníková nerovnost, resp. součet úhlů v trojúhelníku.

Ze sinové věty lze pomocí trigonometrických identit odvodit také tangentovou větu

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\mathrm{tg}((\alpha-\beta)/2)}{\mathrm{tg}((\alpha+\beta)/2)}\,,$$

jejíž význam je spíše historický, neboť se snáze aplikuje při výpočtu bez kalkulačky než věta kosinová. Dnes má využití v počítačové fyzice tehdy, neboť pro určité hodnoty úhlů je numericky stabilnější.

Jak všichni dobře víme, znalost velikostí všech úhlů v trojúhelníku nepostačuje k tomu, abychom určili délky jeho stran. Jelikož však poměry stran zůstávají při škálování zachovány, musí existovat vztah, který vyjadřuje tyto poměry mezi nimi. Jedná se o Mollweidův vzorec

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\,.$$

Ve fyzice nemá běžné využití, jedná se spíše o matematickou zajímavost.

## 1.4 Derivace a integrace goniometrických funkcí

Uvedeme si pouze základní derivace potřebné pro vyšetření goniometrických funkcí:

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Ihned nahlédneme, že funkce sinus má lokální minima a maxima v kořenech funkce kosinus a naopak. Sinus je rostoucí na intervalech, kde je kosinus kladný, a klesající na intervalech, kde je kosinus záporný. Obdobně pro kosinus, pouze s opačným znaménkem. Inflexní body funkcí sinus a kosinus se nacházejí v jejich kořenech. Pro nalezení inflexních bodů funkce tangens musíme spočíst

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,.$$

Body inflexe pro funkci tangens se tedy nacházejí v kořenech funkce sinus a ty jsou shodné s kořeny funkce tangens.

Derivace inverzních goniometrických funkcí lze odvodit více způsoby. Jedním z nich je úprava výrazu $y = \arcsin x$ na $\sin y = x$, diferencování podle $x$ a nalezení (proveďte sami za pomoci Pythagorovy věty)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Vidíme, že výraz na pravé straně je definován pro $x \in (-1{,}1)$ (a má nevlastní jednostranné limity v krajních bodech), což je v souladu s definičním oborem funkce $\arcsin x$. Druhým (v principu velmi podobným) způsobem je aplikace vzorce pro derivaci inverzní funkce

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,,$$

v našem případě tedy

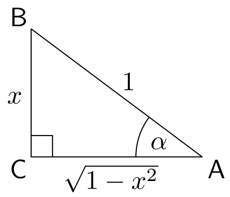
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\,.$$

Pokud ovšem upřednostňujete geometrii před algebrou, lze výrazy typu „goniometrická funkce, která má za argument jinou cyklometrickou funkci“, snadno vyhodnotit za pomoci pravoúhlého trojúhelníku (v důsledku jde opět o použití Pythagorovy věty), viz obrázek 4. V trojúhelníku se standardním značením definujeme $\alpha = \arcsin x$; aby byl tento vztah splněn, musí platit $\sin\alpha = x$. Toho nejsnáze dosáhneme tak, že zvolíme délky stran $a = x$, $c = 1$. Snadno dopočteme, že $b = \sqrt{1-x^2}$, a tedy

$$\cos\alpha = \cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}\,,$$

což je v souladu s výpočty výše. Bez odvození (proveďte sami) uvádíme další dvě derivace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}\,.$$




$$\sin\alpha = x/1 = x$$
$$\alpha = \arcsin x$$
$$\Rightarrow$$
$$\cos\arcsin x = \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$$

Obrázek 4: Geometrická pomůcka pro výpočet derivací inverzních goniometrických funkcí.

Mezi schopnosti dobrého fyzika patří integrování výrazů s goniometrickými funkcemi. Při výpočtu těchto integrálů je výhodné používat vztahy pro převádění mezi sinem a kosinem, tedy Pythagorovu větu, vzorce pro poloviční úhel a vzorce pro dvojnásobný úhel. Užitečným integračním postupem je per partes. Vhodné je zapamatovat si následující integrál:

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C\,.$$

Speciálně určitý integrál přes jednu periodu

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

lze odvodit graficky, když si uvědomíme, že

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x\,,$$

protože v prvním případě se jedná o součet jednoho „kopečku“ a v druhém případě o součin druhé poloviny a poté první poloviny toho samého kopečku (nakreslete si). Zároveň však

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin^2 x + \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 1 \,\mathrm{d}x$$

a poslední integrál spočteme snadno, neboť se jedná o plochu obdélníku se stranami 1 a π – odtud již výsledek výše jasně plyne.

Primitivní funkci k funkci tangens lze odvodit následujícím trikem, kdy v integrandu uvidíme derivaci:

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int -(\ln|\cos x|)' \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C\,.$$

Při integrování složených výrazu s goniometrickými funkcemi se řídíme pravidlem (pozor, mohou existovat lepší postupy) pro per partes zvaným „LIATE“ podle prvním písmen slov Logaritmický, Inverzní, Algebraický, Trigonometrický, Exponenciální – v tomto pořadí se rozhodujeme, jakou funkci budeme derivovat.

Každý fyzik musí umět idealizovat a aproximovat. K aproximaci analytických funkcí okolo zvoleného bodu (obvykle nuly) slouží především Taylorův rozvoj. V takzvané paraxiální aproximaci geometrické optiky (nebo pro kyvadlo s malými kmity) používáme rozvoj do prvního řádu

$$\sin x \approx x \approx \operatorname{tg} x\,,$$
$$\cos x \approx 1\,.$$

V případech, kdy potřebujeme aproximace vyšších řádů, odečteme požadovaný stupeň z vyjádření sinu a kosinu pomocí řad

$$\sin x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$
$$\cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Taylorovu řadu pro tangens nelze stručně zapsat bez použití Bernoulliových čísel.

## 1.5 Goniometrické funkce ve fyzice

Funkce sinus a kosinus popisují kruhový pohyb – pohybuje-li se hmotný bod s konstantní úhlovou rychlostí $\omega$ po kružnici o poloměru $r$, jsou jeho souřadnice v čase $t$ dány vztahy

$$x = r\cos(\omega t)\,,$$
$$y = r\sin(\omega t)\,,$$

přičemž jsme volili střed kružnice v počátku a polohu bodu v čase $t$ jako $x = r$, $y = 0$. První a druhou derivací podle času získáme kartézské složky rychlostí a zrychlení

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = -\omega r\sin(\omega t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y = \omega r\cos(\omega t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a_x = -\omega^2 r\cos(\omega t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = a_y = -\omega^2 r\sin(\omega t)\,.$$

Řešením diferenciální rovnice lineárního harmonického oscilátoru (pružiny kmitající v ose $x$) je harmonické kmitání

$$x = x_\mathrm{m}\sin\omega t\,,$$

kde $x_\mathrm{m}$ je amplituda kmitů. Opět pomocí časových derivací získáme rychlost a zrychlení

$$v_x = \omega x_\mathrm{m}\cos\omega t\,,$$
$$a_x = -\omega^2 x_\mathrm{m}\sin\omega t\,.$$

V neposlední řadě popisují funkce sinus a kosinus časový vývoj proudu a napětí ve střídavých obvodech, kde nabude významu fázový posun mezi těmito funkcemi.

Podrobnější informace naleznete v kapitolách o kruhových pohybech, kmitání a elektrických obvodech.

## 1.6 Hyperbolická a sférická trigonometrie / Rozšiřující

Bude doplněno.

## 1.7 Komplexní vyjádření trigonometrických funkcí / Rozšiřující

Bude doplněno.

## 1.8 Úlohy

**Příklad 1.** Diskutujte vlastnosti funkce $\sin^2 x$.

**Příklad 2.** Vypočtěte hodnoty funkce sinus pro úhly $10°$,$15°$,$18°$. *Nápověda*: využijte součtové vzorce.

**Příklad 3.** Stojíte $d_1 = 50{,}00\,\mathrm{m}$ od šikmé věže v Pise tak, že se naklání přímo na vás. Laserovým dálkoměrem jste změřili, že vrchol věže je od vás vzdálen $d_2 = 72{,}33\,\mathrm{m}$, přičemž laserový paprsek svíral se zemí úhel $\alpha = 43{,}60°$. Jak je věž vysoká? Jak moc se odklání od svislice?

**Příklad 4.** Odvoďte vztah pro výpočet derivace funkce $\cos x$ na základě znalosti derivace funkce $\sin x$ a identity $\cos x = \sin(-x + \pi/2)$.

**Příklad 5.** Vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

**Příklad 6.** Vypočtěte, jaké hodnoty může nabývat napětí ve střídavém obvodu, jestliže je fázově zpožděné oproti proudu o $\varphi = \pi/2$ a proud má hodnotu $I = 0{,}33\,\mathrm{A}$. Časová závislost proudu je $I(t) = I_\mathrm{m} \sin(\omega t)$, kde $\omega$ je úhlová frekvence a $I_\mathrm{m} = 0{,}5\,\mathrm{A}$. Amplituda napětí je $U_\mathrm{m} = 6\,\mathrm{V}$.