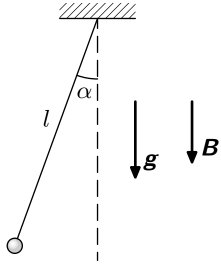
10. ročník, úloha II . 2 ... magnetické kyvadlo *(5 bodů; průměr ?; řešilo 60 studentů)*

V homogenním tíhovém poli (tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) je na závěsu zanedbatelné hmotnosti délky $l = 1{,}00\ \mathrm{m}$ umístěna malá kovová kulička o hmotnosti $m = 10{,}0\ \mathrm{g}$. Na kuličku byl přiveden náboj o velikosti $Q = 5{,}0\ \mu C$. Celá tato aparatura se nachází ve svislém homogenním magnetickém poli, jehož vektor magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ o velikosti $B = 0{,}5\ T$ má stejný směr jako tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$. Ostatní magnetická pole jsou vůči tomuto magnetickému poli zanedbatelná. Celá soustava se nachází v klidu. Závěs vychýlíme o úhel $\alpha = 7°$ a uvolníme. Popište pohyb kuličky po uvolnění.



Obr. 1

Nejprve uveďme kvalitativní řešení. Na kuličku působí magnetická síla, která je dána vektorovým součinem

$$\boldsymbol{F}_m = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,. \tag{1}$$

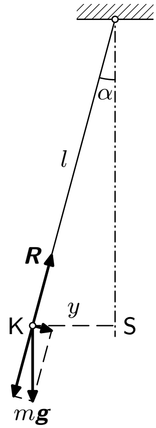
Magnetické pole způsobuje zakřivení dráhy kuličky. Síla, kterou působí na kuličku, ji dle Flemingova pravidla levé ruky odchyluje doleva (při pohledu shora a při kladném náboji kuličky) od směru jejího pohybu (v zadání úlohy míří magnetické pole ve směry osy $-z$). Její dráha musí být odpovídajícím způsobem prohnuta. Uvážíme-li, že dominujícím pohybem kuličky je pohyb matematického kyvadla, vypadá její kmitání při pohledu shora dle obr. 5. Na kružnici leží ty body, v nichž je rychlost kuličky nulová. Magnetické pole tedy způsobuje stáčení roviny kyvu kyvadla.

Cílem kvantitativního řešení, kterým se fyzika ve skutečnosti zabývá, je dostat řešením pohybových rovnic závislost polohového vektoru částice na čase $\boldsymbol{r}(t)$. Vycházíme při tom z pohybových rovnic

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_m + \boldsymbol{R},$$

kde $\boldsymbol{R}$ je síla vlákna. V kartézském systému (x, y, z) mají tvar

$$\begin{aligned} ma_x &= -BQv_y + R_x,\\ ma_y &= BQv_x + R_y,\\ ma_z &= -mg + R_z. \end{aligned} \tag{2}$$



Obr. 2

Toto je komplikovaná soustava rovnic, jejíž přímé řešení je obtížné. My se však bez něho obejdeme.

Předně si uvědomíme, že i obyčejné matematické kyvadlo analyticky vyřešíme jen pro malé výchylky α, kdy můžeme psát $\sin\alpha \doteq \alpha$. Potom se pohyb odehrává přibližně v rovině konstantní souřadnice z. Podle obrázku 2 rozložíme tíhovou sílu na složku kolmou na závěs a složku ve směru závěsu, která se vyrovná s vazebnou silou závěsu. Potom síla $mg\sin\alpha$ působí přibližně proti výchylce y, pro niž platí $\sin\alpha = y/l$. Tím se nám redukují rovnice (2) na dvojrozměrný problém

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x = -BQv_y - \frac{mg}{l}x,\\ ma_y &= F_y = BQv_x - \frac{mg}{l}y. \end{aligned} \tag{3}$$

Na první pohled jsme si moc nepomohli, neboť před sebou máme soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{BQ}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{g}{l}x,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{BQ}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{g}{l}y. \tag{4}$$

I když lze tuto soustavu rovnic oproti původní soustavě řešit přesně matematickým postupem, nebudeme ho provádět a raději zkusíme nalézt řešení fyzikální analogií.

Ta spočívá v tom, že „náhodou“ víme ještě o jedné síle, která je jako magnetická síla (1) dána vektorovým součinem rychlosti částice a nějakého vektoru. Je to síla Coriolisova. Nejprve vysvětlíme, jak vypadá Coriolisova síla a s čím úzce souvisí, a potom vám objasníme ideu našeho řešení magnetického kyvadla.

Pohybový zákon v rotující vztažné soustavě

Mějme inerciální vztažnou soustavu (IVS) S' a soustavu S, která vůči ní rotuje kolem společného počátku konstantní úhlovou rychlostí ω (viz obr. 3), jedná se tedy o soustavu neinerciální (NIVS). Druhý Newtonův zákon platí jen pro IVS a to v podobě, kterou všichni dobře známe (čárkovaně značíme veličiny náležející do S')

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}', \tag{5}$$

V soustavě S však vznikají tzv. zdánlivé síly, které nikterak nesouvisí s fundamentálními interakcemi (s gravitační či elektromagnetickou silou). Tyto síly jsou přímým důsledkem toho, že se soustava S pohybuje vůči všem IVS zrychleně. Pohybový zákon v soustavě S pak můžeme zapsat v podobě

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_S, \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{F}$ je výslednice všech skutečných sil (např. elektrická, magnetická či gravitační síla) a $\boldsymbol{F}_S$ je výslednice všech zdánlivých (setrvačných) sil.

V soustavě S působí obecně dvě takové zdánlivé síly Jednou z nich je *síla odstředivá*, tu všichni dobře znáte z kolotoče,

$$\boldsymbol{F}_O = m\omega^2[x', y'] \equiv m\omega^2\boldsymbol{\varrho},$$

kde jsme $\boldsymbol{\varrho}$ označili polohový vektor v rovině (x, y). Druhou silou je *síla Coriolisova*, která je zodpovědná např. za stáčení pasátních větrů v subtropech. A toto je námi hledaná síla, která nám pomůže úlohu elegantně vyřešit, neboť je podobně jako magnetická síla dána vektorovým součinem (působí kolmo na směr rychlosti)

$$\boldsymbol{F}_C = 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}.$$

Platí pro ni stejné zákonitosti, které jsme popsali u síly magnetické. Druhý Newtonův zákon v soustavě S pak má tvar

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + m\omega^2\boldsymbol{\varrho} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v},$$

což v rovině (x, y) dává soustavu rovnic

$$ma_x = F_x - 2m\omega v_y + m\omega^2 x,$$
$$ma_y = F_y + 2m\omega v_x + m\omega^2 y. \tag{7}$$

Řešení rovnic analogií

Rovnice (7) vypadají velice podobně jako rovnice (3). Představme si, že rovnice (3) nepopisují působení magnetického a tíhového pole na kyvadlo při jeho malých výchylkách v naší IVS, nýbrž že se jedná o kyvadlo v NIVS S rotující úhlovou rychlostí ω a s nulovým magnetickým polem. Jinak řečeno: budeme považovat magnetickou sílu za sílu Coriolisovu, kde

$$\omega = \frac{BQ}{2m}\,.$$

Proč to všechno děláme? K naší hypotetické NIVS S totiž existuje IVS S', která má tu vlastnost, že z pohybovém zákona (6) se stane zákon (5), ve kterém už žádný vektorový součin $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}$ není. Tím se pohybové rovnice velice zjednoduší a nám nebude činit problémy je vyřešit. Nalezneme tak řešení v soustavě S', které jednoduchou transformací přeneseme zpět do soustavy S.

Přidáme-li do (3) nulu, tzn. přičteme a odečteme $m\omega^2 x$, resp. $m\omega^2 y$, rovnice budou mít tvar

$$\begin{aligned} a_x &= -\left(\frac{g}{l} + \omega^2\right) x - 2\omega v_y + \omega^2 x,\\ a_y &= -\left(\frac{g}{l} + \omega^2\right) y + 2\omega v_x + \omega^2 y. \end{aligned} \tag{8}$$

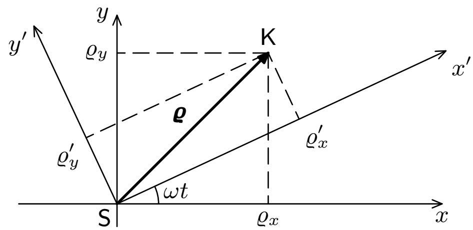
Srovnáme-li rovnice (8) s (7), vidíme, že výrazy $-m\Omega^2 x$ a $-m\Omega^2 y$, kde jsme označili

$$\Omega^2 = \frac{g}{l} + \omega^2, \tag{9}$$

hrají roli složek síly $\boldsymbol{F}$ v rovnici (6).

Nyní stačí jenom vědět, jak se transformují složky síly do soustavy S', vůči níž se S otáčí, a tuto transformaci odvodíme z obr. 3. Velice snadno zjistíte, že

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\omega t + y' \sin\omega t,\\ y &= -x' \sin\omega t + y' \cos\omega t. \end{aligned} \tag{10}$$



Obr. 3

Jedná se jenom o hledání těch správných pravoúhlých trojúhelníků, jejichž odvěsny dohromady poskládají x a y. Inverzní transformace z S do S' vychází

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\omega t - y \sin\omega t,\\ y' &= x \sin\omega t + y \cos\omega t, \end{aligned}$$

neboť soustava S' se vůči S otáčí s úhlovou rychlostí $-\omega$. Jelikož síla $\boldsymbol{F}$ je úměrná vektoru $[x, y]$, ihned odtud vyplývá, že v soustavě S' bude mít tvar

$$\boldsymbol{F}' = [-\Omega^2 x', -\Omega^2 y'],$$

a tedy musíme v S' řešit dvě rovnice, které už nejsou mezi sebou provázány,

$$
\begin{aligned}
a'_x &= -\Omega^2 x', \\
a'_y &= -\Omega^2 y'.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Rovnice (11) určitě všichni poznáváte, jejich řešením jsou obyčejné kmity, neboť zrychlení je přímo úměrné výchylce, ale opačného směru. Ale pozor, jsou to obecně eliptické kmity, neboť zde velice záleží na počátečních podmínkách.

Obecné řešení rovnic (11) napíšeme jako superpozici harmonických funkcí sin a cos

$$
\begin{aligned}
x' &= K \sin \Omega t + L \cos \Omega t, \\
y' &= M \sin \Omega t + N \cos \Omega t,
\end{aligned} \tag{12}
$$

konstanty K, L, M, N musíme dopočítat z počátečních podmínek (např. konkrétně pro hodnoty $K = N \neq 0$, $L = M = 0$ dostáváme obyčejné kruhové kmity). V čase $t = 0$ platí (počátek soustavy souřadné odpovídá rovnovážné poloze kyvadla – bod S na obr. 2)

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= \xi, \quad v'_y(0) = 0, \\
x'(0) &= 0, \quad v'_x(0) = -\omega\xi,
\end{aligned} \tag{13}
$$

kde jsme označili počáteční výchylku ve směru y (a tím i y') $\xi = l \sin \alpha$. Rychlost $v_x(0)$ jsme zvolili nulovou, a proto v soustavě S' je $v'_x(0) = -\omega\xi$, neboť se celá S' otáčí vůči S úhlovou rychlostí $-\omega$.

Ze známého vzorečku $v = \omega r$ pro rovnoměrný pohyb po kružnici, a uvážíme-li, že rychlosti jsou maximální tam, kde jsou nulové polohy, a naopak, snadno odvodíme

$$
\begin{aligned}
v'_x &= K\Omega \cos \Omega t - L\Omega \sin \Omega t, \\
v'_y &= M\Omega \cos \Omega t - N\Omega \sin \Omega t,
\end{aligned} \tag{14}
$$

Dosadíme-li počáteční podmínky (13) do rovnic (14) a (12), získáme $K = -\xi\omega/\Omega$, $L = 0$, $M = 0$, $N = \xi$. V soustavě S' má řešení naší úlohy tvar

$$
\begin{aligned}
x' &= -\frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t, \\
y' &= \xi \cos \Omega t.
\end{aligned}
$$

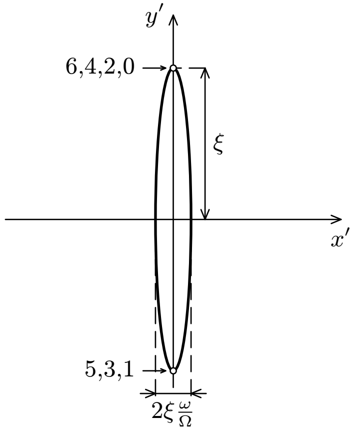
V soustavě S' kyvadlo vykonává eliptické kmity, jak je to vidět na obrázku 4.

Teď už stačí provést transformaci zpět do soustavy S podle vztahu (10). Řešení naší úlohy pak vypadá takto

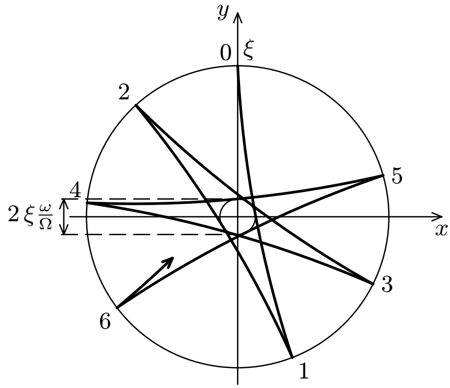
$$
\begin{aligned}
x &= \xi \cos \Omega t \sin \omega t - \frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t \cos \omega t, \\
y &= \xi \cos \Omega t \cos \omega t + \frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Za použití stejných počátečních podmínek bychom dospěli k výsledku (15) řešením rovnic (4). Cílem této úlohy v žádném případě nebyl výklad řešení soustavy diferenciálních rovnic. Uznávám, že námi použitá finta není úplně triviální, pokud jste ji ale pochopili, měli byste mít jasno v tom, co to vlastně ty zdánlivé síly jsou.

Na obr. 5 se skutečně můžeme přesvědčit, že pohyb kyvadla v našem přiblížení (15) kvalitativně souhlasí s tím, co jsme předpověděli v úvodu.



Obr. 4



Obr. 5

Závěr

Kyvadlo bude kmitat s úhlovou frekvencí Ω, přičemž ale nikdy neprojde rovnovážnou polohou. Během kmitání se stáčí vždy doleva, směřuje-li magnetické pole ve směru osy $-z$ a naopak doprava, je-li $\boldsymbol{B}$ ve směru z, a to tak, že polohy maximálních či minimálních výchylek se stáčí úhlovou rychlostí ω. Kyvadlo tak dělá charakteristické „špičky". Nejmenší vzdálenost od počátku souřadné soustavy je $\xi\omega/\Omega$.

Pro zadané hodnoty získáme počáteční výchylka $\xi = 12\,\mathrm{cm}$, frekvence $\omega = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Hz}$, úhlová frekvence $\Omega = 3{,}1\,\mathrm{Hz}$. Tyto hodnoty samozřejmě vůbec neodpovídají obrázkům, kde byl použit poměr frekvencí asi $1 : 8{,}5$. Magnetická síla je mnohem slabší než tíhová, a tak za těchto podmínek můžeme mluvit o „stáčení roviny kyvů kyvadla", neboť velikost vedlejší poloosy $\xi\omega/\Omega$ z obrázku 4 je zanedbatelná vůči hlavní poloose ξ, je asi desetitisíckrát menší. Stejně tak můžeme zanedbat ω ve vztahu (9). Dostáváme tak obyčejné matematické kyvadlo kmitající s periodou 2 s, jehož rovina kyvů se otočí kolem dokola za 14 hodin.

Poznámka

Úplně stejný pohyb vykazuje populární *Foucaultovo kyvadlo*, na které působí námi použitá Coriolisova síla s tím, že úhlová frekvence rotace poloh maximální a minimální vzdálenosti od rovnovážné polohy kyvadla je $\omega = \omega_Z/\sin\varphi$, kde φ je zeměpisná šířka a ω_Z je velikost uhlové rychlosti Země rotující okolo vlastní osy. To souvisí s tím, že na pohyb kyvadla v našem přiblížení má vliv pouze složka vektoru $\boldsymbol{\omega}_Z$ ve směru tíhového zrychlení. V naší zeměpisné šířce ($\varphi = 50^\circ$) se Foucaultovo kyvadlo otočí kolem dokola asi za 31,3 hodin; na severní polokouli se stáčí doprava, kdežto na jižní polokouli doleva. Kdybychom chtěli naše magnetické kyvadlo experimentálně změřit, museli bychom přihlédnout i k rotaci Země, která rovněž způsobuje stáčení roviny kyvů, neboť jsou oba jevy řádově srovnatelné.

Někdy se stáčení Foucaultova kyvadla vysvětluje tak, že se nemění orientace roviny kyvů vůči stálicím, což není obecně pravda, platí to jenom na pólech. Je to například vidět z toho, že za jeden den se ocitneme ve stejné pozici vůči stálicím, avšak kyvadlo rotační pohyb zdaleka ještě nedokončilo. Správným vysvětlením pohybu Foucaultova kyvadla je jen a jen působení Coriolisovy síly, která je důsledkem toho, že soustava spjatá se zemí je neinerciální.

Halef & Daniel Kráľ

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.