

10. ročník, úloha II. E ... kostka cukru (7 bodů; průměr ?; řešilo 54 studentů)

Zjistěte, jaký tlak vydrží kostka cukru, tj. jaká je její mez pevnosti v tlaku. V řešení nezapomeňte uvést parametry použitých kostek (rozměry kostky, značku cukru apod.). Vhodnou metodou proveďte tolik měření, aby vaše výsledky byly průkazné (nejméně deset měření na jeden druh kostky). Z výsledků zkuste vyvodit nějaké závěry.

Teorie

Při každém měření vycházíme z nějakých teoretických předpokladů. Měli bychom tedy zmínit aspoň ty základní, které s naším měřením bezprostředně souvisejí. Úkolem bylo změřit mez pevnosti cukru v tlaku. Působíme-li na průřez S pevného tělesa tlakovou silou F_p , pak v rovnovážném stavu působí v opačném směru síly pružnosti daného materiálu. Míru „napjatosti“ tělesa v nějaké části tělesa o průřezu S kolmém na vnější tlakovou sílu F popisujeme veličinou zvanou normálové napětí. Normálové napětí značíme σ_n a platí $\sigma_n = F_p/S$, tedy $[\sigma_n] = \text{Pa}$. Pro některé pevné látky existuje kritická hranice normálového napětí σ_p , při jejímž překročení dojde k trvalé deformaci. σ_p nazýváme *mez pevnosti v tlaku*. Při pevném průřezu S tedy existuje pro některé látky kritická síla F_{krit} taková, že při působení větší silou dojde k trvalé deformaci. Je $\sigma_p = F_{\text{krit}}/S$.

Kostka cukru je těleso se stálým průřezem. Abychom změřili její mez pevnosti v tlaku, musíme na ni působit tlakovou silou a posléze kostku trvale deformovat. Vhodné je působit pomalu se zvětšující tlakovou silou kolmo na jednu ze stěn kostky, přičemž protější stěna je opřena o podložku.

Uvažme nyní vnitřní strukturu kostky. Kostka je složena z velkého množství drobných krystalků, menších než 1 mm. Tyto krystalky pojí k sobě nějaká síla, o jejíž povaze by nám asi něco řekli spíš v cukrovaru. Tato síla je však slabší než síly, díky nimž drží pohromadě každý jednotlivý krystalek o sobě. Při dosažení kritického napětí dojde nejprve k porušení „vazeb“ mezi krystalky a kostka se na tyto krystalky rozsype. Teprve kdybychom působící sílu ještě několikrát násobně zvětšili, rozdrtili bychom i tu hromádku krystalků.

Tlakovou silou musíme působit na stěnu kostky rovnoměrně, na každou plošku ΔS této stěny by měla působit stejná síla ΔF . Přesto se nevyhneme problémům s „okrajovými jevy“. Na oddělení krystalků dotýkajících se hrany kostky je totiž třeba menší působící síly než na stejné krystalky uvnitř stěny. Důsledky tohoto jevu nám nezbyde než zanedbat, je však třeba zajistit, aby na tyto okraje nepůsobila větší síla než na krystalky uprostřed. Další nepříjemný jev je skutečnost, že když se kostka už jednou začne drolit, sama zabraňuje dalšímu drcení tím, že rozdrčený cukr „překáží“. Je nasnadě, že po úspěšném rozdrčení cukru odhalíme v hromádce krystalků nějaký nerozdrčený kousek. Také můžeme odhadnout a vzápětí pokusem ověřit průběh deformace zvyšujeme-li tlakovou sílu F_p , pak poblíž kritické hodnoty dojde nejprve k narušení „vazeb“ mezi krystalky na ploše, na níž F_p působí, potom se rozdrtní okraje kostky, následuje destrukce zbytku kostky.

Postup měření

Naznačíme celkem 4 metody, jak změřit mez pevnosti v tlaku pro kostkový cukr. Ve všech postupech je třeba nejprve změřit rozměry kostky. Pokud se totiž jednotlivé kostky liší významněji v rozměrech, je třeba změřit rozměry pro každou zvlášť. K měření rozměrů kostky je možno užít posuvné měřítko s noniem, v nejhorším případě i pravítko. Kostky, které se velmi málo liší, můžeme naklást těsně za sebou do řady a změřit tak jejich průměrnou délku pravítkem.

- (1) Kostku položíme na vodorovnou hladkou podložku, která je dost pevná (ocel apod.) a neohýbá se. Na kostku položíme neohebnou pevnou desku. Na desku klademe pomalu závaží. Když dojde k rozdrčení kostky, zjistíme hmotnost všech použitých závaží. Tato aparatura je jistě velmi nestabilní, při malém naklonění ze zvýší síla působící na některou hranu, ta se začne hroutit a zhroutí se celá kostka při poměrně malé zátěži. Vhodnější je proto rozmístit na podložku 3 nebo více kostek tak, aby při zatížení na nich spočívající desky působila na každou z kostek stejná síla. Např. 4 kostky umístíme do 4 rohů čtverce, zakryjeme čtvercovou deskou a tu zatížíme. Celkovou hmotnost závaží pak ze zřejmých důvodů dělíme počtem kostek.
- (2) Kostku položíme na pevnou podložku vedle osobní váhy. Na kostku dáme pevnou destičku rozměrů o trochu větších než kostka. Zvážíme se, stoupneme si na váhu a velmi pomalu „přenášíme tíhu“ z váhy na kostku, sledující stupnici váhy. Údaj odečtený těsně před rozdrčením odečteme od své hmotnosti a získáme zátěž spočívající v ten okamžik na kostce.
- (3) Kostku položíme i s podložkou a nadložkou na osobní váhu a pomalu na vrchní destičku působíme silou svisle dolů, sílu velmi pomalu zvětšujeme. Přitom sledujeme stupnici váhy. Důležitý pro naše měření je údaj odečtený těsně před rozdrčením, neboť během drčení dochází k prudkým výkyvům ručičky vah.
- (4) Metody působící na kostku přes nějakou páku, zatěžovanou závažím na různých místech. U těchto metod závisí úspěch značně na jejich provedení. Velmi snadno zde dojde k situaci, že silou nepůsobíme na celou stěnu kostky.

Vlastní měření

Použili jsme 2 druhy cukru:

- a) Cukrovar a rafinerie cukru v Dobrovcí, krychličky o hraně $a = (12,1 \pm 0,2)$ mm.
- b) Cukr z Pražských cukrovarů o rozměrech $a = (21,8 \pm 0,1)$ mm, $b = (12,4 \pm 0,2)$ mm, $c = (11,0 \pm 0,1)$ mm.

- (1) Nejdříve jsme se pokusili provést měření s jednou kostkou, ovšem nestabilita zajistila kolaps už při zatížení 10 kg. Pro více kostek jsme postup nerealizovali, neboť vyžadoval příliš velkou zátěž na vhodné podložce.
- (2) Kostku jsme vložili mezi dvě ocelové destičky. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v následujících tabulkách.
 - a) *Dobrovecký cukr*

m/kg	58	55	40	54	47	39	57	43	38	45
$\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$	3,89	3,69	2,68	3,62	3,15	2,61	3,83	2,89	2,55	3,02

Hmotnost zátěže $m = \bar{m} \pm s(\bar{m}) = (48 \pm 2)$ kg, k hrubé chybě nedošlo.

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl $S = (1,46 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Chyba přístrojů (váhy): $\pm 0,5$ kg (půl dílku stupnice).

Průměrná mez pevnosti $\bar{\sigma}_p = 3,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka $s = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{\sigma}_p) = 0,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Mez pevnosti v tlaku $\sigma_p = \bar{\sigma}_p \pm$ celková odchylka $= (3,2 \pm 0,2) \cdot 10^6 \text{ Pa} \pm$ chyba přístrojů \pm chyba metody.

Chyba přístrojů: $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, tedy $\sigma_p = (3,2 \pm 0,3) \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

b) *Pražský cukr*

m/kg	63	65	61	67	65	58	65	60	62	65
$\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$	2,29	2,36	2,22	2,43	2,36	2,11	2,36	2,18	2,25	3,36

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl $S = (2,70 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Průměrná mez pevnosti $\bar{\sigma}_p = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka $s = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{\sigma}_p) = 0,03 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Chyba přístrojů: $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Mez pevnosti v tlaku $\sigma_p = (2,3 \pm 0,1) \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

- (3) Opět jsme vložili kostku mezi 2 ocelové destičky. Celá soustava měla zanedbatelnou hmotnost vzhledem k chybě osobní váhy $\pm 0,5 \text{ kg}$. Naměřené hodnoty odečtené ze stupnice váhy těsně před rozdrčením jsou v tabulkách.

a) *Dobrovecký cukr*

m/kg	30	43	36	45	31	40	33	35	44	41
$\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$	2,01	2,89	2,41	3,02	2,08	2,68	2,22	2,35	2,95	2,75

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl $S = (1,46 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Průměrná mez pevnosti $\bar{\sigma}_p = 2,54 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka $s = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{\sigma}_p) = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Chyba přístrojů: $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Mez pevnosti v tlaku $\sigma_p = (2,5 \pm 0,2) \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

b) *Pražský cukr*

m/kg	42	40	43	46	41	45	39	42	41	45
$\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$	1,53	1,45	1,56	1,67	1,49	1,64	1,42	1,53	1,49	1,64

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl $S = (2,70 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Průměrná mez pevnosti $\bar{\sigma}_p = 1,54 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka $s = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{\sigma}_p) = 0,03 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Chyba přístrojů: $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Mez pevnosti v tlaku $\sigma_p = (1,5 \pm 0,1) \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Závěr a diskuse

Metoda použitá v měření (2) dává zřejmě mnohem větší hodnoty než metoda (3). Kde je chyba? V jedné z metod, popřípadě v obou. Při svých experimentech jsme si všimli, že kritická síla, při které se kostka začne drolit, závisí do jisté míry na časové změně této síly. Pozorování je takové, že při větší časové změně síly vydrží kostka kupodivu víc. Druhá metoda pak má taký nedostatek. Spočívá ve zkreslení vlivem už zmíněného faktu, že hrana je vůči tlakové síle

„méně odolná“, a tudíž se začne bortit při malém zvýšení tlaku oproti ostatním bodům účinné plochy. Správný výsledek lze očekávat někde mezi výsledky obou metod, rozhodně nebude menší než výsledek metody (3).

Častým zjištěním bylo, že hodnoty meze pevnosti pro jednotlivé kostky téhož druhu cukru se nezanedbatelně lišily. To si lze vysvětlit individuálními fluktuacemi v každé kostce způsobenými při výrobě anebo vnějšími faktory (vlhkost apod.) a také narušením hran některých kostek např. při přepravě. Co se týče systematických chyb, byly to (kromě chyb metod) také chyby přístrojů, nejčastěji osobní váhy. Za dobrý postřeh považuji i to, že kritický tlak závisí i na výšce kostky, tj. rozměru kolmém k účinné ploše.

Filosofický závěr a malé poučení

Z výsledků by se dal sestavit pěkný žebříček našich cukrovarů. Po vzoru pana Dishmana ze známého filmu „Křídýlko nebo stehýnko“ bychom tak mohli přidělit tři hvězdičky např. Dobroveckému cukrovaru s dovětkem: „cukr z Dobrovice svými báječnými krystalky omámí vaše chuťové buňky, avšak dejte si pozor na protézy.“ Podobně bychom mohli konstatovat: „kostky pro chvíle pohody z Hrušovan se vám rozplynou na jazyku tak, že na to ani 1,4 MPa nepotřebujete.“ A to poučení? Z provedených výzkumů vyplývá, že když se o někom řekne, že je z cukru, může to znamenat skutečně ledacos.

Matouš Jiráek