

13. ročník, úloha II. E ... sloupec cukru (8 bodů; průměr ?; řešilo 56 studentů)

Jistě víte, že když ponoříte kostkový cukr do čaje, voda do kostky vzlíná. Je na vás, abyste vymysleli vhodnou aparaturu a proměřili do jaké výšky kapalina vystoupí, máte-li hodně vysoký sloupec kostek cukru (pokud budete mít chuť, tak třeba i závislost výšky na čase). Navrhněte nějaký fyzikální model. Ve vodě se ale cukr rozpouští, takže se záhy rozpadne. Použijte tedy raději benzín, líh či jinou kapalinu, ve které se cukr nerozpouští.

Teorie

V této experimentální úloze šlo hlavně o to, abyste si zkusili proměřit vzlínání kapaliny do porézní látky.

Kostka cukru je slisována z velmi malých krystalků, mezi kterými jsou ovšem ještě mezírky. Můžeme se o tom jednoduše přesvědčit. Změříme-li průměrnou hustotu kostky cukru, vyjde asi $1020 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, kdežto tabulková hodnota hustoty sacharosu je $1580 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. V kostce cukru je tedy asi 35 % (objemových) vzduchu.

Zkusíme nyní odhadnout, jak velké jsou krystalky, ze kterých je kostka slisována. Na 1 cm dlouhé hraně jsme napočítali asi třicet krystalků. Uvážíme-li vzduchové mezírky mezi nimi, je průměrný rozměr krystalku 0,2 mm a mezírky 0,1 mm.

Nyní můžeme řádově odhadnout, jak vysoko do sloupečku cukru se kapalina dostane. Výška výstupu h bude právě taková, aby se kapilární tlak vyrovnal s hydrostatickým, nebo-li

$$h\rho_k g = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

kde ρ_k je hustota kapaliny a σ její povrchové napětí (pro líh je $\rho_k = 790 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a $\sigma = 22 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$), r_1 a r_2 jsou poloměry zakřivení hladiny kapaliny v mezírkách. Odhadneme, že $r_1 = r_2 = r$ a to se rovná asi dvěma třetinám rozměru mezírky. Po dosažení vychází $h = 8 \text{ cm}$, což je, jak později uvidíme, vcelku dobrý odhad.

Nyní se pokusíme popsat průběh vzlínání. Na sloupec kapaliny v kostce cukru působí tíha $F_G = \alpha\rho_k g x S$, kde x je výška kapalinového sloupce, S obsah podstavy cukru a α objemový podíl kapaliny v cukru.

Dále působí síla kapilární $F_k = \alpha S (2\sigma/r)$.

A ještě Newtonova síla, která díky viskozitě (míře vnitřního tření) kapaliny brání jejímu pohybu vzhůru

$$F_n = \eta \frac{\Delta v}{\Delta r} S^*,$$

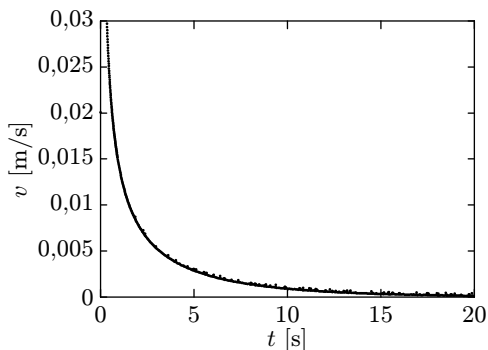
kde η je dynamická viskozita kapaliny (pro líh $\eta = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$), $\Delta v/\Delta r$ je rozdíl rychlosti na kraji a uprostřed mezírky dělený poloměrem mezírky, odhadneme ho jako $(2/r)(dx/dt)$ a S^* je plocha styku kapaliny s cukrem $S^* = lx$, kde $l = 8\pi r S$ je délka styku cukru, vzduchu a kapaliny (n je počet mezírek ve čtverečním metru, odhadneme $n = 1000 \text{ cm}^{-2}$).

Tyto síly způsobují změnu hybnosti kapaliny za čas. Dostáváme tedy pohybovou rovnici ve tvaru

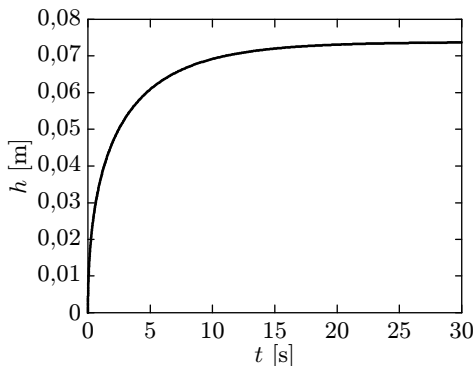
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} \frac{dm}{dt} = F_k - F_G - F_n,$$

Po dosažení a úpravě

$$\alpha\rho \left[\frac{d^2 x}{dt^2} x + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = \alpha \frac{2\sigma}{r} - \alpha\rho_k g x - 16\eta n x \frac{dx}{dt}.$$



Obr. 1. Teoretická závislost rychlosti stoupání na čase



Obr. 2. Teoretická závislost výšky kapaliny na čase

Takovou složitou diferenciální rovnicí bychom exaktně těžko řešili, ale s pomocí programu Famulus to není problém. Na grafech (obr. 1 a 2) vidíte závislosti výšky a rychlosti stoupání na čase.

Teorie je tedy poněkud komplikovaná, musíme hodně věcí zanedbat a odhadnout, ale jak uvidíme, opravdu přibližně popisuje danou situaci. Ač v zadání bylo řečeno, že máte navrhnout nějaký fyzikální model vztlínání, pokusilo se o to jen pět řešitelů (poznáte je z výsledkové listiny, mají sedm a více bodů). Ostatní se spokojili s konstatováním, že za všechno může kapilarita nebo se teorií nezabývali vůbec, za což ovšem mnoho bodů nezískali.

Měření

Konečně se dostáváme k samotné realizaci pokusu. Nejvíce z vás použilo jako kapalinu technický líh, ani my tedy neuděláme jinak. Dále budeme potřebovat kostkový cukr (konkrétně kilogramové balení z cukrovaru Hrochův Týnec, velikost jedné kostky je $1,1 \times 1,8 \times 2,2$ cm), misky, milimetrové měřítko, gumičky na zpevnění sloupečků cukru, stopky, hodí se vhodné barvivo (např. inkoust), neboť čirý líh se v bílém cukru špatně rozezná.

Do misky postavíme sloupeček cukru stažený gumičkou, připevníme k němu milimetrové měřítko, přičemž se snažíme, aby jednotlivé kostky na sebe co nejlépe doléhaly. Do misky nalijeme líh a v okamžiku, kdy se dotkne spodní kostky, spustíme stopky a zapisujeme hodnoty. My jsme měření provedli třikrát, přičemž jsme kostky stavěli na různé podstavy. Jak to všechno dopadlo můžete vidět v tabulkách a v grafu na obr. 3.

1. Kostky ležely na nejmenší stěně

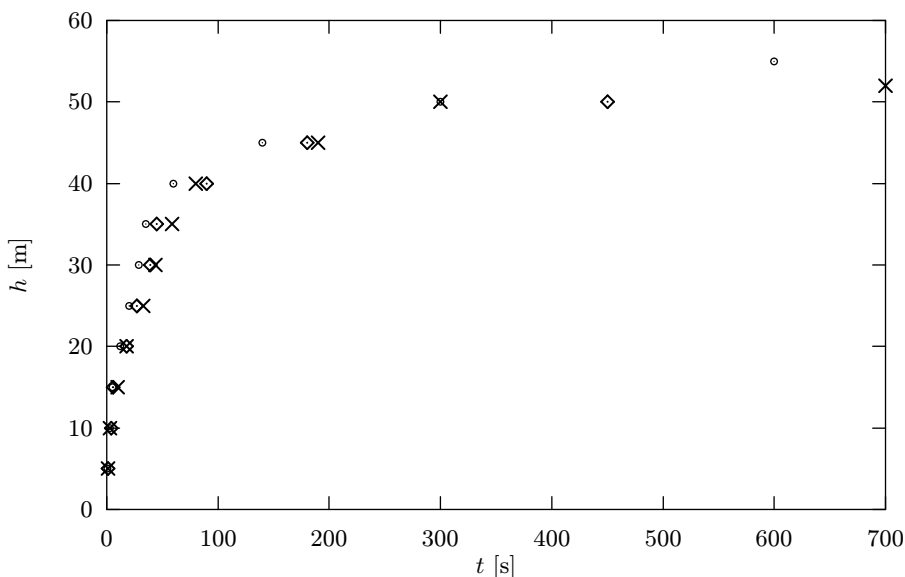
h (mm)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
t (s)	0,7	3	5	12	20	29	35	60	140	300	600

2. Kostky ležely na prostřední stěně

h (mm)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
t (s)	1	4	6	18	27	39	45	90	180	450

3. Kostky ležely na největší stěně

h (mm)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
t (s)	1	3	10	18	33	44	59	80	190	300	800



Obr. 3. Naměřené hodnoty: plné kolečko — kostky na nejmenší stěně, čtvereček — kostky na prostřední stěně, křížek — kostky na největší stěně

Po asi dvou hodinách vypadal stav takto: V případě jedna byla výška 6,6 cm, do čtvrté kostky se už kapalina nedostala. V případě dva se kapalina zastavila už v páté kostce, maximální výška 5,9 cm. Ve třetím sloupečku kapalina vyšplhala do výše 6,3 cm. Je tedy vidět, že maximální dosažená výška výstupu nezávisí na ploše podstavy, což potvrzuje teorii. Naopak rychlost výstupu na ploše podstavy závisí, to se dá ovšem vysvětlit tím, že když kostky stojí na širší podstavě, musí kapalina překonat více předělů mezi jednotlivými kostkami. Každý předěl kapalinu hodně zpomalí. Kdybychom měli jednolitý sloupec cukru, tento nedostatek by nevznikal.

Zhodnocení

O chybách měření řekneme jen to, že nejnepřesnější bylo určování výšky, neboť kapalina byla v různých částech kostky různé vysoko. Někaké statistické chyby měření zde nemá příliš velký smysl počítat, neboť jsme na to provedli málo měření. Provádět desítky měření také nemá smysl, neboť s jiným cukrem či jinou kapalinou by vycházely výsledky odlišné.

Nyní ještě srovnání teorie s praxí: Vidíme, že výšku výstupu 8 cm jsme předpověděli hodně přesně. Křivka závislosti h na t také zhruba odpovídá. Ta teoretická má sice asymptotu níže než je naměřená hodnota, ale vzhledem k tomu, že jsme hodně zanedbávali a neuvažovali předěly mezi kostkami, je to výsledek dobrý.

Někteří z vás potvrdili i jiná teoreticky předpovězená fakta. Zkoušeli jste například měřit pro více druhů kapalin a skutečně vám vycházelo, že kapalina s menším povrchovým napětím

či větší hustotou vystoupá níže. Jeden řešitel dokonce měřil s různě jemnými cukry a vyšlo mu, že v jemnějším cukru je h větší.

Závěrem trocha statistiky, spočítali jsme průměr a statistickou chybu maximálních výšek výstupu, které naměřili řešitelé, kteří získali alespoň 3 body, a zde je výsledek $h_{\text{prům}} = 6,2$ cm a $\Delta h = 0,3$ cm.

Lenka Zdeborová