14. ročník, úloha V . 4 ... *supermetro* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 30 studentů)*

Ve Švýcarsku plánují vybudování celostátního „metra“. Vlaky mají jezdit na magnetickém polštáři tunelem, ze kterého je částečně vyčerpaný vzduch, a dosahovat rychlosti kolem 500 km·h^{-1}.

Tunel však nelze dokonale utěsnit. Předpokládejme, že chceme udržet tlak na hodnotě 0,05p_a, ale bez neustálého odčerpávání by za 1 den vzrostl na 0,5p_a. Spočtěte výkon, jaký je nutný na odčerpávání vzduchu ze 100 km tohoto tunelu, je-li jeho průměr 5 m, účinnost odčerpávání oproti ideálně pracujícímu stroji 10% a teplota 6°C. S čím lze takový výkon porovnat? *Zadal Honza Houštěk na základě informací, jež ho zaujaly.*

Nejprve spočítejme, jakou práci musíme vykonat, abychom z nádoby, ve které je podtlak, odčerpali n molů plynu. Tlak uvnitř nádoby označme p_1, tlak vně p_2. Abychom při odčerpávání vykonali nejmenší možnou práci, musíme postupovat takto: Nejprve ve válci o objemu V_1 izotermicky stlačíme plyn na objem V_2 tak aby jeho tlak vzrostl na hodnotu p_2. Při tom vykonáme práci

$$\int_{V_1}^{V_2} -\Delta p \,\mathrm{d}V = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} - p_1(V_1 - V_2) = nRT \ln \frac{p_2}{p_1} - p_1(V_1 - V_2)\,.$$

Děj je izotermický takže platí $p_1V_1 = p_2V_2$. Po tom spojíme válec s okolím a plyn vytlačíme z válce ven. Vykonaná práce bude

$$\int_{V_2}^{0} -\Delta p \,\mathrm{d}V = p_2V_2 - p_1V_2\,.$$

Celková práce potřebná k vytlačení n molů plynu je tedy

$$W = nRT \ln \frac{p_2}{p_1}\,.$$

Musíme ještě spočítat jakou rychlostí proniká vzduch do tunelu. Uvažujme takto: pokud bychom přestali vzduch z tunelu odčerpávat, tlak v tunelu by začal růst. Rychlost jakou by vzduch do tunelu proudil by byla úměrná rozdílu tlaků v tunelu a v okolí. Platilo by tedy

$$\frac{\mathrm{d}\,(\Delta p)}{\mathrm{d}t} = -k\Delta p\,,$$

kde Δp je rozdíl tlaků a k je nějaká konstanta. Řešením této diferenciální rovnice je funkce

$$\Delta p = \Delta p_0 \mathrm{e}^{-kt}\,.$$

Ze zadání víme že za jeden den by bez odčerpávání vzrostl tlak na $p_2/2$. Platí tedy

$$\frac{0{,}5}{0{,}95}\Delta p_0 = \Delta p_0 \mathrm{e}^{-kt_d}\,,$$

kde t_d je doba jednoho dne. Konstantu k tedy spočteme jako

$$k = \frac{\ln 1{,}9}{t_d}\,.$$

Rychlost pronikání vzduchu do tunelu bude časová derivace tlaku při $t = 0$. Tedy

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\mathrm{d}\,(\Delta p)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = k\Delta p_0\,.$$

Podle stavové rovnice je

$$n = \frac{pV}{RT}\,,$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{RT}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,.$$

Práci potřebnou na odčerpání n molů jsme ale spočetli už nazačátku. Po dosazení tedy pro výkon dostáváme

$$P = \frac{1}{\eta}V_\mathrm{t}k\Delta p_0 \ln\frac{p_2}{p_1}\,,$$

kde V_t je objem daného úseku tunelu a $\Delta p_0 = 0{,}95\,p_2$. Po dosazení zadaných hodnot a vydělení teoretického výkonu účinností dostaneme $P = 13{,}2\,\mathrm{MW}$.

Pavel Augustinský