

15. ročník, úloha III.2 ... valčík (3 body; průměr ?; řešilo 53 studentů)

Odhadněte celkovou kinetickou energii páru tančícího vídeňský valčík.

Úlohu objevila Lenka Zdeborová.

Nejdříve si musíme uvědomit, jak se tančí valčík. Jak jistě všichni dobře víte, je to tanec na tři doby. U standartního valčíku každá doba trvá přibližně $t_0 = 0,5$ s (záleží na skladbě). V první době udělá tanečník krok vpřed (tanečnice krok vzad). V dalších dvou dobách se pár otočí o 180° . V dalším taktu se vše opakuje s tím rozdílem, že tanečník nyní dělá to, co v minulém taktu tanečnice.

Spočítat kinetickou energii tančícího páru v první době je jednoduché, protože nedochází k rotaci páru. Tato kinetická energie bude

$$E_{k1} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} (m_m + m_z) \left(\frac{s_k}{t} \right)^2,$$

kde m_m je hmotnost muže (80 kg), m_z je hmotnost ženy (60 kg) a s_k je délka kroku. Délka kroku při tanci bude menší než normální délka kroku a proto budeme uvažovat 0,5 m. Kinetická energie v první době tedy bude 70 J. Tato energie ovšem kvadraticky závisí na rychlosti. Bude se tedy hodně měnit v závislosti na délce kroku a rychlosti skladby.

Mnohem těžší bude vypočítat rotační energii páru v druhé a třetí době. Úhlová rychlost páru bude $\omega = \pi/2t_0$. Nejsložitější na tomto výpočtu bude vypočítat moment setrvačnosti tančícího páru. K tomu můžeme použít několik různě přesných cest.

Nejjednodušší je tančící pár nahradit dvěma hmotnými body otáčejícími se kolem společného těžiště. Označíme vzdálenost těžišť jednotlivých tanečníků l . Pro jednoduchost budeme uvažovat, že se otáčejí kolem středu spojnice jejich těžišť. Celkový moment setrvačnosti tedy bude

$$J_1 = \frac{1}{4} l^2 (m_z + m_m).$$

Pro vzdálenost $l = 0,4$ m dostaneme $J_1 = 5,6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Obecně můžeme uvažovat, že tanečník má moment setrvačnosti vůči svému těžišti J_m a tanečnice J_z . Celkový moment setrvačnosti pak spočteme pomocí Steinerovi věty.

$$J = J_m + m_m \left(\frac{l}{2} \right)^2 + J_z + m_z \left(\frac{l}{2} \right)^2 = J_m + J_z + J_1.$$

Zde je vidět, že přesnost předchozího modelu závisí na velikosti momentů setrvačnosti jednotlivých tanečníků.

Spočítat momenty setrvačnosti jednotlivých tanečníků je velice složité. Nejjednodušší metoda je nahrazení jednotlivých částí lidského těla geometrickými tvary, jejichž moment setrvačnosti známe. Toto jsme provedli pomocí rozměrů reprezentativního těla a získali jsme hodnotu pro muže asi $J_m = 2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ a pro ženu přibližně $J_z = 1,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Vypočteme-li nyní kinetickou energii v druhé a třetí době, dostaneme

$$E_{k2} = J \omega^2 = 44 \text{ J}.$$

Vypočteme-li průměrnou kinetickou energii páru na jednu dobu dostaneme

$$E_p = \frac{1}{3} (E_{k1} + 2E_{k2}) = 52 \text{ J}.$$

Musíme si uvědomit, že tato hodnota je velice orientační a jedná se pouze o řádový odhad, který se může značně měnit v závislosti na tanečnicích a skladbě. Uvědomíme-li si, že rozdíly hmotnosti tanečniců se mohou pohybovat někde kolem 10 % stejně tak přesnost určení všech dalších údajů jako l , t_0 a s , můžeme dostávat energie od 40 J až po 200 J.