Milí řešitelé,

držíte v rukou zadání druhé série úloh 18. ročníku FYKOSu. Připomeňme na tomto místě několik organizačních záležitostí.

Řešení úloh 1. série s průběžnou výsledkovou listinou dostanete se zadáním 3. série během prosince. Pokud je ve vašem okolí stále někdo, koho fyzika baví, ale o našem semináři neví nebo si myslí, že FYKOS není pro něj, neboť ho řeší jenom vítězové celostátního kola olympiády, vysvětlete mu prosím, že to není pravda.

Pokud jste 1. sérii neřešili, není nic ztraceno, můžete se zapojit i nyní. Novým řešitelům bychom také chtěli vzkázat, ať se nelekají toho, že v zadání úloh se často neobjeví ani jediná zadaná veličina, narozdíl od středoškolských učebnic, kde bývají zadané právě všechny potřebné hodnoty. V našem semináři se více chceme přiblížit skutečné fyzice a ne pouhému dosazování do vzorečků.

Každému, kdo nám pošle svůj e-mail, budeme vždy poté, co nám od něj dojde řešení, posílat krátkou zprávu, ve které potvrdíme, že řešení skutečně došlo. Klasická pošta bývá nespolehlivá a tímto způsobem předejdeme nepříjemným překvapením. Svá řešení můžete samozřejmě celá posílat e-mailem na adresu `fykos-solutions@mff.cuni.cz`, pro podrobnější informace (např. o možných formátech souborů) se prosím podívejte na naše www stránky `http://fykos.mff.cuni.cz`. Naleznete tam také archiv úloh, novinky o dění v semináři a mnoho dalších věcí.

Přejeme plno nápadů při řešení úloh a s těmi pilnými z vás se těšíme na viděnou na jarním soustředění.

organizátoři

Zadání II. série

Termín odeslání: 29. listopadu 2004

Úloha II . 1 ... *Mojžíšův zázrak*

Mojžíš přistoupil k Rudému moři zvolav: „Rozevři se mořská hladino a nech národ vyvolených projít suchou nohou do zemi zaslíbené.“ Poté vstoupil do mořských vln a ty se rozestoupily. Určete, jak velkou silou byl obdařen Mojžíš, aby mohl převést Židy přes Rudé moře. Předpokládejte, že moře je široké 1 km a hluboké 20 m.

Úloha II . 2 ... *kolik drátů na sloupech?*

Kolikafázové napětí bychom museli používat, aby efektivní hodnota napětí fáze–zem byla stejná jako efektivní hodnota napětí mezi dvěma sousedními fázemi?

Úloha II . 3 ... *vrtulník*

Aby se helikoptéra mohla vznášet, musí mít její motor výkon P. Jaký výkon P' musí mít helikoptéra, která je přesnou poloviční kopií původní helikoptéry, aby se také vznášela? Předpokládejte, že rotor má 100 % účinnost.

Úloha II . 4 ... *zoufalí trosečníci*

Trosečníci na severním pólu si chtějí zpříjemnit chvíli před blížící se smrtí posledním šálkem kávy. Poraďte jim, jak si mají ohřát vodu, aby se jí dostalo na co nejvíce z nich. Se svými skromnými technickými prostředky mohou ohřev realizovat následujícími způsoby:

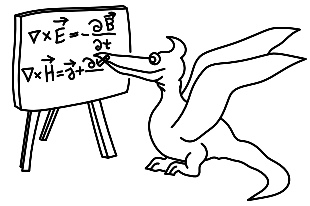
a) Akumulátor o vnitřním odporu $2R$ přímo připojí k topné spirále o odporu R.
b) Tentýž akumulátor připojí do série s topnou spirálou a kondenzátorem. Pokaždé, když se kondenzátor nabije, jej z obvodu vytáhnou a připojí obráceně.
c) Tímtéž akumulátorem budou střídavě nabíjet kondenzátor a vybíjet ho přes topnou spirálu.

Úloha II . P ... *nečekaná překážka*

Řidič automobilu jedoucí rychlostí v náhle spatří, že jeho vůz směřuje doprostřed betonové zdi šířky $2d$ ve vzdálenosti l. Součinitel klidového tření mezi pneumatikami a vozovkou je f. Poraďte řidiči, co má dělat, aby se vyhnul srážce se zdí. Rozhodněte, pro jakou velikost rychlosti je to ještě možné.

Úloha II . E ... *není hmotnost jako hmotnost*

Experimentálně ověřte rovnost setrvačné (té, která vystupuje ve druhém Newtonově pohybovém zákonu) a gravitační hmotnosti (té, která vystupuje v Newtonově gravitačním zákonu).



Seriál na pokračování

Newtonovy pohybové rovnice

Po nezbytných definicích v minulém díle seriálu se můžeme začít zabývat příčinami pohybu. Měli bychom dospět k Newtonovým pohybovým rovnicím, které budeme formulovat pro inerciální vztažné soustavy.

Příčina změny rychlosti se v Newtonově mechanice nazývá *silou*. Působení síly na daný hmotný bod je projevem interakce s ostatními hmotnými body. Míra této interakce je dána velikostí síly. Abychom byli schopni formulovat pohybové zákony, je třeba umět přiřadit každému hmotnému bodu sílu, která na něj působí.

Síla je příčinou změny rychlosti, nemůže tedy sama záviset na zrychlení hmotných bodů. Obecně síla působící na hmotný bod závisí na poloze a rychlosti bodu samého a také na polohách a rychlostech ostatních bodů a na čase. Dále budeme předpokládat *princip nezávislosti sil*, což znamená

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N,\boldsymbol{v}_N,t)=\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,t)+\dots+\boldsymbol{F}_N(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}_N,\boldsymbol{v}_N,t).$$

Jinak řečeno, síly působící mezi dvojicí bodů nejsou nijak ovlivněny přítomností ostatních bodů. Sílu působící na hmotný bod můžeme proto rozložit na síly působící mezi jednotlivými dvojicemi. Důležitým požadavkem na síly je platnost **3. Newtonova zákona**, kterému také říkáme *zákon akce a reakce*. Ten říká

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21},$$

neboli velikost síly, kterou působí první bod na druhý, je rovna velikosti síly, kterou působí druhý bod na první.

Na mechanice je určit vztahy pro síly. Nemusí přitom vždy vycházet z interakce mezi jednotlivými hmotnými body, řada vztahů pro síly byla určena experimentálně. Sám Newton šel příkladem a popsal gravitační působení zákonem

$$\boldsymbol{F}_{12} = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{|\boldsymbol{r}_{12}|^3} \boldsymbol{r}_{12},$$

kde $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\varkappa$ je gravitační konstanta. Veličiny μ_1 a μ_2, které charakterizují jednotlivé hmotné body, jsou mírou gravitace, nazýváme je *tíhové hmotnosti*.

Nyní se dostáváme k formulaci pohybových zákonů. Zajímá nás pohyb jednoho hmotného bodu, pokud známe sílu na něj působící (známe tedy rychlosti a polohy okolních bodů). Pohyb tohoto bodu je v inerciální soustavě popsán vztahem

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t), \tag{1}$$

kterému říkáme **2. Newtonův zákon**. Podle definice rychlosti a zrychlení je

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}, t). \tag{2}$$

Veličina m charakterizuje jedinou vlastnost hmotného bodu – jeho setrvačnost, nazýváme ji proto *setrvačnou hmotností*. Velice pozoruhodné je, že tento parametr je identický s tíhovou hmotností μ z Newtonova gravitačního zákona. Sám Newton to nedokázal zdůvodnit. Rovnost obou hmotností je předpokladem obecné teorie relativity. Nejnovější měření ukazují, že

$$\frac{m}{\mu} = 1 \pm 10^{-19}.$$

Sami se o rovnosti obou hmotností můžete přesvědčit při řešení experimentální úlohy této série.

Rovnice (2) představuje soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic, pro každou souřadnici v kartézské souřadnicové soustavě je jedna. Říkáme jim Newtonovy pohybové rovnice.

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t),$$
$$m\ddot{y} = F_y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t),$$
$$m\ddot{z} = F_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t).$$

Pokud budeme mít zadány počáteční podmínky

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}),$$

můžeme z těchto rovnic jednoznačně určit funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$. Určíme tak budoucí časový vývoj polohového vektoru $\boldsymbol{r}(t)$, což jsme přesně chtěli.

Složitější je situace, pokud sledujeme pohyb více než jednoho bodu. Máme-li N hmotných bodů, potřebujeme k jejich popisu vyřešit soustavu $3N$ rovnic a znát $6N$ počátečních podmínek. Pro velké N je tento úkol velice obtížný, pro jejich popis se používají jiné modely.

Newtonovy rovnice nám umožňují určit pro přesně dané počáteční podmínky budoucí vývoj systému. Tato typická vlastnost klasické mechaniky se nazývá *laplaceovský determinismus*.

Použití Newtonových rovnic si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 1 – *pohyb tělesa v kapalině*

Napište a řešte pohybové rovnice tuhé koule v kapalině a homogenním tíhovém poli Země. Počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ směřuje svisle dolů. Uvažujte, že koule je obtékána laminárně.

Řešení

Proti pohybu koule působí odporová síla, která je pro laminární obtékání dána vztahem

$$F = 6\pi\eta R v = kv,$$

kde R je poloměr koule a η dynamická viskozita vody. Pohybové rovnice mají tedy tvar

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}} - k\boldsymbol{v}.$$

Zvolme kartézskou souřadnicovou soustavu tak, že osa x míří svisle vzhůru, a napišme si pohybové rovnice v těchto souřadnicích

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg + \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho g - k\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= -k\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= -k\dot{z}, \end{aligned}$$

které budeme řešit spolu s počátečními podmínkami $\boldsymbol{v}(0) = (-v_0, 0, 0)$ a $\boldsymbol{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Předposlední rovnici řešíme separací proměnných

$$\int \frac{\mathrm{d}v_y}{v_y} = -\int \frac{k}{m}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad v_y = C\mathrm{e}^{-kt/m}.$$

Integrační konstantu C určíme z počáteční podmínky $v_y(0) = 0$, vychází $C = 0$. Podobně dostaneme pro z-ovou složku. Druhou integrací tedy máme

$$y = y_0, \qquad z = z_0.$$

Separací proměnných budeme řešit rovněž i první pohybovou rovnici

$$\int \frac{\mathrm{d}v_x}{v_x + \frac{g}{k}\left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho\right)} = -\int \frac{k}{m}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad v_x = C\mathrm{e}^{-kt/m} - \frac{g}{k}\left(m - \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho\right).$$

Integrační konstantu C určíme opět z počáteční podmínky $v_x(0) = -v_0$. Po dosazení vychází

$$v_x = \frac{g}{k}\left(m - \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho\right)\left(\mathrm{e}^{-kt/m} - 1\right) - v_0\mathrm{e}^{-kt/m}.$$

Odtud můžeme snadno určit mezní rychlost koule, pro $t \to \infty$ je

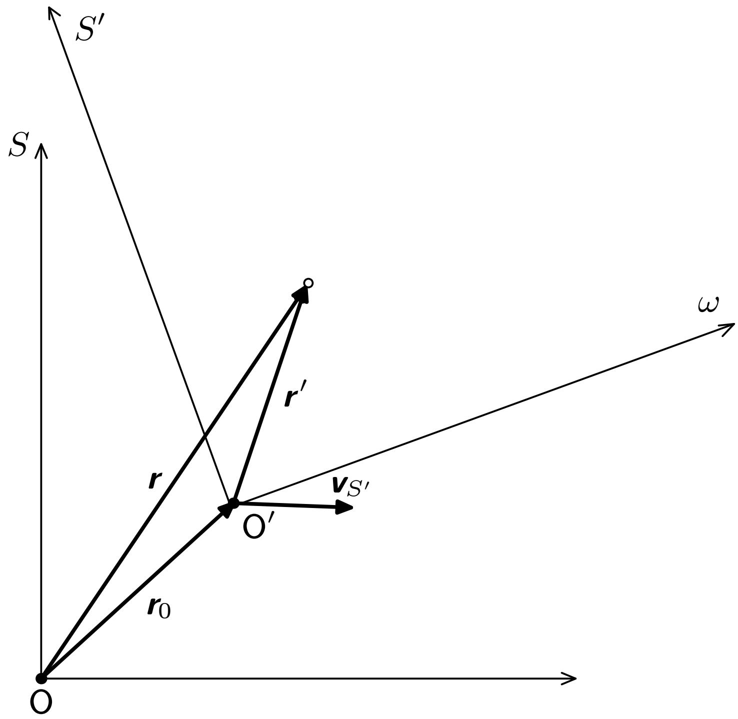
$$v_x(\infty) = -\frac{g}{k}\left(m - \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho\right).$$

Abychom dostali hledanou závislost $x(t)$, budeme vztah pro v_x ještě jednou integrovat. Při určování integrační konstanty přihlédneme k $x(0) = x_0$. Dostaneme

$$x(t) = -\frac{g}{k}\left(m - \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho\right)\left(t + \frac{m}{k}\left(\mathrm{e}^{-kt/m} - 1\right)\right) + v_0\frac{m}{k}\left(\mathrm{e}^{-kt/m} - 1\right) + x_0.$$

Pohybová rovnice v neinerciálních systémech

Uvažujme inerciální vztažnou soustavu S, ve které se hmotný bod pohybuje se zrychlením $\boldsymbol{a}$. Dále mějme neinerciální vztažnou soustavu S'. V té se hmotný bod pohybuje se zrychlením $\boldsymbol{a}'$. Pokusíme se určit vztah mezi těmito vektory.



Obr. 1

Pro libovolný vektor $\boldsymbol{A}$ platí následující vztah

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} + \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

kde derivace s čárkou značí časovou derivaci vektoru $\boldsymbol{A}$ v čárkované soustavě[1]. Představit si to můžete tak, že vektor $\boldsymbol{A}$ se mění sám (druhý člen na pravé straně) a ještě k tomu se otáčí rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ (první člen na pravé straně). Vektor $\boldsymbol{\omega}$ je vektorem úhlové rychlosti systému S' vůči systému S. Vztah (3) nyní aplikujeme na polohový vektor $\boldsymbol{r}'$ v soustavě S'

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t} &= \\ = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t} &= \\ = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_{S'}&,\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{v}'$ jsme označili vektor rychlosti hmotného bodu v čárkované soustavě a $\boldsymbol{v}_{S'}$ je rychlost počátku soustavy S' vůči soustavě S. Poslední vztah zderivujeme a ještě jednou použijeme (3)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}_{S'} =$$

[1] Složky vektoru $\boldsymbol{A}$ vyjádříme v soustavě S' a každou z nich derivujeme.

$$= \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}_{S'} =$$
$$= \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{a}_{S'},$$

přičemž jsme označili $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$.

Odvozený vztah mezi oběma zrychleními dosadíme do (1)

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{a}_{S'}. \tag{4}$$

Při pohledu na tuto rovnici se nabízí označit celý výraz na pravé straně jako sílu, potom bude mít pohybová rovnice stejný tvar i v neinerciálních soustavách. Sílu

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{z} = -m\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{a}_{S'},$$

proto nazveme *zdánlivou*. Síly zdánlivé je třeba odlišovat od sil *pravých* (*vtištěných*). Síly pravé mají původ ve vzájemné interakci hmotných bodů, zatímco síly zdánlivé vznikají pouze v neinerciálních soustavách; lze je odstranit přechodem k inerciálnímu systému.

Síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{z}$ se skládá ze síly *Coriolisovy* $\boldsymbol{F}_\mathrm{c} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$, síly *Eulerovy* $\boldsymbol{F}_\mathrm{e} = -m\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}'$, dále síly *odstředivé* $\boldsymbol{F}_\mathrm{o} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ a síly *translační* $\boldsymbol{F}_\mathrm{tr} = -m\boldsymbol{a}_{S'}$. Coriolisova síla působí pouze na pohybující se body vzhledem k S'. Síla *setrvačná* $\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = \boldsymbol{F}_\mathrm{e} + \boldsymbol{F}_\mathrm{o} + \boldsymbol{F}_\mathrm{tr}$ působí i na body v klidu.

V následujícím příkladě si zkusíme vyřešit pohybové rovnice v neinerciálním systému.

Příklad 2 – *pohyb v soustavě spojené se Zemí*

Najděte rovnice popisující pohyb hmotného bodu na povrchu Země v soustavě spojené se Zemí.

Řešení

Pro jednoduchost řešení předpokládejme $\boldsymbol{r}(0) = 0$ a $\boldsymbol{v}(0) = 0$. Zaveďme si následující kartézskou souřadnicovou soustavu. Osa z je svislá a míří nahoru, osa y míří od jihu k severu. Úhlová rychlost rotace Země má složky $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega_y, \omega_z)$, kde $\omega_y = \omega \cos\varphi$, $\omega_z = \omega \sin\varphi$ a φ je zeměpisná šířka. V pohybové rovnici

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_G - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

vystupuje navíc pouze Coriolisova síla, neboť odstředivá je zahrnuta v tíhové. Ve složkách dostáváme

$$\ddot{x} = -2(\omega_y \dot{z} - \omega_z \dot{y}),$$
$$\ddot{y} = -2\omega_z \dot{x},$$
$$\ddot{z} = -g + 2\omega_y \dot{x} \approx -g.$$

V poslední rovnici si můžeme dovolit aproximaci, neboť příslušná složka Coriolisovy síly je díky pomalosti zemské rotace zanedbatelná vzhledem ke složce tíhové. Pak platí

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2,$$

což dosadíme do první rovnice. Máme soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\ddot{x} = +2(\omega_y g t + \omega_z \dot{y}),$$
$$\ddot{y} = -2\omega_z \dot{x},$$

jejíž řešení je s ohledem na počáteční podmínky (proveďte jako cvičení)

$$x(t) = \frac{g\omega_y}{4\omega_z^3}(2\omega_z t - \sin(2\omega_z t)), \quad y(t) = \frac{g\omega_y}{4\omega_z^3}(1 - 2\omega_z^2 t^2 - \cos(2\omega_z t)).$$

Rozvedeme-li sinus a cosinus v Taylorovu řadu a vezmeme z ní první člen, který se neodečte, pak

$$x(t) \approx \frac{1}{3} g\omega_y t^3 = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\varphi, \quad y(t) \approx -\frac{1}{6} g\omega_y\omega_z t^4 = -\frac{1}{6} g\omega^2 t^4 \sin\varphi\cos\varphi.$$

S těmito vztahy je možné se spokojit, další členy jsou totiž překryty faktory, které jsme nebrali v úvahu (nehomogenita pole, vliv Měsíce). Hmotný bod se bude tedy kromě volného pádu pohybovat jihovýchodním směrem.

Zákon zachování energie

Vraťme se ještě k soustavě tří rovnic (2). Z teorie diferenciálních rovnic plyne, že pro každou takovou soustavu můžeme najít šest lineárně nezávislých funkcí $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t)$, které jsou podél trajektorie konstantní, neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}, t) = 0\,.$$

Funkce s touto vlastností nazýváme *první integrály pohybových rovnic*. Pokud se nám podaří nahradit pohybové rovnice stejným počtem prvních integrálů, můžeme přejít k této nové soustavě. Řešení bude značně snazší, protože se bude jednat o soustavu diferenciálních rovnic pouze prvního řádu.

Integrály pohybu se hledají na základě symetrií systému. My si zde ukážeme, že jedním z těchto integrálů je mechanická energie.

Pohybovou rovnici (2) vynásobíme skalárně zprava vektorem rychlosti $\boldsymbol{v}$

$$m\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{5}$$

Všimneme si, že levou stranu můžeme dostat derivací výrazu

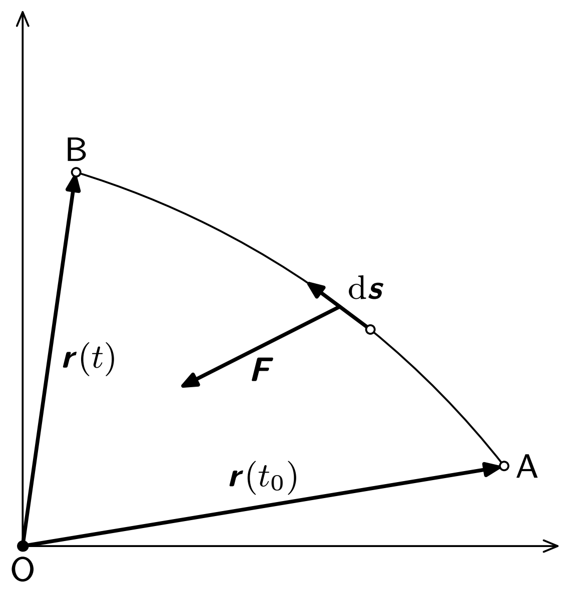
$$T = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$$

podle času. Veličinu T nazýváme *kinetickou energií* hmotného bodu. Rovnici (5) proto nyní podle času zintegrujeme (od okamžiku t_0 do t), abychom na levé straně získali kinetickou energii

$$T - T_0 = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t.$$

Na součin $\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ se můžeme dívat jako na elementární vektor, jehož velikost je rovna dráze urážené za $\mathrm{d}t$ a jehož směr je tečný na trajektorii. Proto píšeme

$$T - T_0 = \int_{s(t_0)}^{s(t)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{6}$$



Obr. 2

Integrálu na pravé straně říkáme křivkový integrál, neboť integrujeme podél trajektorie. Tento integrál, který určitě všichni dobře znáte, je roven celkové práci vykonané na hmotném bodu mezi body $A = s(t_0)$ a $B = s(t)$.

Pokud existuje funkce $V(\boldsymbol{r})$ taková, že

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

říkáme síle $\boldsymbol{F}$ *konzervativní* a funkci V *potenciální energie*. Mezi konzervativní síly patří například síla gravitační nebo síla elektrostatická. Dosaďme tento vztah do (6)

$$T - T_0 = -\int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) = -\int_A^B \mathrm{d}V = V(A) - V(B).$$

Vidíme tedy, že pokud na hmotný bod působí jen konzervativní síly, zachovává se veličina

$$E = T + V, \tag{7}$$

kterou nazýváme *mechanická energie*.

Úloha II . S ... *Newtonovy pohybové rovnice*

a) Napište a řešte pohybové rovnice hmotného bodu v tíhovém poli Země. Souřadnicovou soustavu orientujte tak, že osy x a y jsou vodorovné a osa z míří vzhůru. Počáteční poloha hmotného bodu je $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, h)$, počáteční rychlost je $\boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$. Soustavu spojenou se Zemí považujte za inerciální.
b) Muž s puškou sedí v křesle, které se otáčí kolem svislé osy s frekvencí $f = 1\,\mathrm{Hz}$. Spolu s křeslem se otáčí terč, který je k němu pevně upevněn. V jistém okamžiku muž vystřelí kulku rychlostí $v = 300\,\mathrm{km/h}$ směrem od osy otáčení přesně do středu terče. V jakém místě prorazí kulka terč? Řešte jak z pohledu neinerciální, tak z pohledu inerciální vztažné soustavy. Vzdálenost hlavně od středu terče je $l = 3\,\mathrm{m}$, odpor vzduchu zanedbejte.
c) Vyjádřete závislost rychlosti hmotného bodu na poloze v gravitačním poli Slunce.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.mff.cuni.cz
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.