

18. ročník, úloha IV. P ... rezonující sklenička (5 bodů; průměr 1,91; řešilo 22 studentů)

Kroužením mokřým prstem po hraně broušené skleničky (například na víno) lze vyloudit poměrně intenzivní zvuk. Pokud se do skleničky nalije voda, pak frekvence vyluzovaného tónu klesá se vzrůstající výškou hladiny. Sami si to vyzkoušejte a pokuste se tento jev vysvětlit.

Na problém ve vinárně narazil Michael Komm.

Skleničku s vodou si můžeme modelově představit jako jeden lineární harmonický oscilátor s určitou tuhostí k a hmotností M . Rezonanční frekvence takového oscilátoru závisí na těchto parametrech následujícím vztahem

$$f = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

V prvním přiblížení budeme považovat tuhost za nezávislou na množství vody ve skleničce. Hmotnost M nebude přesně součet hmotností skleničky a vody v ní, ale půjde spíše o efektivní hmotnost – voda i sklenička k ní budou přispívat svým dílem. Zde můžeme v prvním přiblížení předpokládat lineární závislost, tj.

$$M = am_{\text{sklo}} + bm_{\text{voda}}.$$

Koeficienty a a b jsou materiálové konstanty dané tvarem skleničky, tuhostí skla, viskozitou vody a dalšími veličinami. Jejich přesné určení by bylo komplikované, nám ale ke kvalitativnímu posouzení stačí předpoklad, že jde o nenulová kladná čísla. Nyní nás bude zajímat závislost frekvence na množství nalité vody.

$$f(m_{\text{voda}}) = \sqrt{\frac{k}{am_{\text{sklo}} + bm_{\text{voda}}}}.$$

Analýza takovéto funkce není obtížná. Pro kladné m_{voda} monotónně klesá, tedy s rostoucím množstvím vody ve skleničce klesá frekvence vydávaného zvuku.

V řešeních se často vyskytovaly některé chybné modely, které stojí za to rozebrat. Někteří řešitelé se domnívali, že ve skleničce rezonuje vzduchový sloupec podobně jako v písňale varhan. To by ovšem vyvolávalo přesně opačnou závislost, tj. s rostoucím množstvím vody roste frekvence. Jiné navrhované vysvětlení bylo, že frekvence se mění vlivem tlumení kmitů sklenky o vodu. To by sice vysvětlovalo charakter závislosti, nicméně intenzita vydávaného zvuku by rychle klesala s množstvím vody, což se nepozoruje. Posledním častým modelem bylo, že se kmity původně generované pohybem prstu po skle přenášejí do vody a ta rezonuje. Tento model ovšem nevysvětluje, proč rezonuje i prázdná sklenička a proč je změna frekvence při malých množstvích vody blízká frekvenci prázdné skleničky.

Michael Komm

michael@fykos.mff.cuni.cz